

Mathematik für das Gymnasium

Klasse 9 bis 13

Christian Posthoff
The University of the West Indies
St. Augustine Campus
Trinidad & Tobago

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Vektoren und Matrizen	3
2.1	Vektoren	3
2.2	Matrizenrechnung - Lineare Gleichungssysteme	10
2.3	Aufgaben	21
2.4	Lösungen	22
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	25
3.1	Wahrscheinlichkeitsrechnung	25
3.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	30
3.3	Zufallszahlen	33
3.4	Statistische Kennwerte	33
3.5	Aufgaben	41
3.6	Lösungen	42
4	Differentialrechnung	45
4.1	Zahlenfolgen, unendliche Reihen und Produkte	45
4.2	Grenzwerte	54
4.3	Einfache Ableitungen	58
4.4	Die Momentangeschwindigkeit	60
4.5	Höhere Ableitungen	62
4.6	Aufgaben	66
4.7	Lösungen	66
5	Integralrechnung	67
5.1	Bestimmte Integrale	67
5.2	Unbestimmte Integrale	70
5.3	Einige wichtige Anwendungen	74
5.4	Aufgaben	79
5.5	Lösungen	81

Inhaltsverzeichnis

6	Anhang	93
6.1	Wie verwendet man Taschenrechner und Programme?	93
6.2	Wie löst man Textaufgaben?	93
6.3	Wie gestaltet man ein Projekt?	94

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zweidimensionale Vektoren	4
2.2	Addition von zwei Vektoren	5
2.3	Drei-Finger-Regel der rechten Hand für elektrischen Leiter im Magnetfeld	8
3.1	Ein einfacher Spielwürfel	25
3.2	Der Teil des Roulette-Spiels, in dem die Kugel rollt	31
3.3	Hier werden die Einsätze platziert	31
3.4	Verschiedene Korrelationen	41
3.5	Ziehen ohne Zurücklegen	43
4.1	Ein einfaches Grenzwertverhalten	54
4.2	Unendliche Grenzwerte: Polstellen	56
4.3	Das Auftreten von Asymptoten	57
4.4	Sekanten für die Funktion $f(x) = x^2 - 1$	59
4.5	Darstellung der Funktion $y = -2 \sin^2(x) \cdot \cos(x) + \cos^3(x)$. . .	63
4.6	Die Ableitung der Funktion $y = -2 \sin^2(x) \cdot \cos(x) + \cos^3(x)$. .	63
5.1	Fläche unter der Kurve $y = f(x) = \frac{x^2}{4}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$	67
5.2	Die Funktion $y(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 1)$	73
5.3	Die Funktion $y(x) = x^3 - 7x + 6$	75
5.4	Die Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve	78
5.5	Grenzwerte der Funktion $\frac{1}{x}$	80
5.6	Die Funktion $y = 1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}$	83
5.7	Das Newtonsche Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 1$. . .	85
5.8	Die Ausgangsfunktion $\cos^4(x)$ im Vergleich mit $\cos(x)$	88
5.9	Ableitung der Funktion $\cos^4(x)$	89
5.10	Zweite Ableitung der Funktion $\cos^4(x)$	89
5.11	Ableitungen der Funktion $y = \cos(x) $	90
5.12	Die Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ und ihre erste Ableitung	91
6.1	Das Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β und γ	95

Abbildungsverzeichnis

6.2	Ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck	96
6.3	Das Dreieck ABC mit den Höhen h_a, h_b, h_c	97
6.4	Das Dreieck ABC mit den Mittelsenkrechten auf den drei Seiten a, b und c	97
6.5	Das Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden	98
6.6	Das Dreieck ABC mit den Seitenhalbierenden	98
6.7	Der Umkreis eines Dreiecks ABC	99
6.8	Thales-Kreise über einem Durchmesser	99
6.9	Der Inkreis eines Dreiecks	100
6.10	Der Feuerbach-Kreis eines Dreiecks	101
6.11	Der Ankreis am Dreieck	101

1 Vorwort

Die Bewältigung des Faches „Mathematik“ ist für viele Gymnasiasten ein kritischer Gegenstand, an dem sie sich viele Jahre reiben und der sie oft verzweifeln lässt. Das muss aber nicht so sein. Es gibt einige Möglichkeiten, diese Haltung zu beeinflussen.

Der erste Faktor ist das Verhalten der Eltern. Viele Eltern erklären zu einem bestimmten Zeitpunkt bei einer Mathematik-Aufgabe: „Das habe ich früher schon nicht verstanden, da kann ich Dir nicht helfen!“ und wenden sich ab. Im günstigsten Falle organisieren sie Nachhilfe- oder Förderunterricht, was aber oft zu einem finanziellen oder personellen Problem wird. Hier kann man nur an die Eltern appellieren, einen zweiten Anlauf zu versuchen und sich an der Ausbildung ihrer Kinder oder Enkel zu beteiligen.

Eine große Hilfe können die Systeme sein, die über das Internet verfügbar sind. Hier muss das Umfeld der Schüler, also das Elternhaus und die Schule, dafür sorgen, dass jeder Schüler Zugang zu diesen Programmen hat und diese auch wirklich verwendet. Der Lehrer muss für jedes Teilgebiet ein entsprechendes Programm aussuchen und dafür sorgen, dass jeder Schüler Zugang hat. Es reicht im allgemeinen ein Programm aus; die Devise „Viel hilft viel“ gilt im allgemeinen nicht, da sich die einzelnen Programme oft in der Bedienung unterscheiden. Sowohl Lehrer als auch Schüler müssen das Programm sicher handhaben können, da ja Bedienungs- und Eingabefehler durchaus normal sind. Hier muss also genügend oft und lange geübt werden. Aufgaben, die mit Hand ausgeführt werden, sollten im wesentlichen nur prüfen, ob der vermittelte Stoff richtig verstanden wurde, sie sollten aber nicht allzu kritisch bewertet werden.

Im Unterricht sollte die historische und kulturelle Bedeutung der Mathematik hervorgehoben und den Schülern nahe gebracht werden. Nicht jeder Schüler wird Spaß haben am Mathematik-Unterricht, aber es sollte wenigstens eine neutrale Grundhaltung erreichbar sein, ähnlich der Einstellung zum Musik-

oder Kunstunterricht.

Prüft man die Ergebnisse vieler Arbeiten und Klausuren, so bemerkt man, dass viele Schüler nicht am mathematischen Teil der Aufgabe, sondern an der Übertragung eines Textes in ein mathematisches Problem scheitern. Das sollte ein zentraler Punkt sein, da man ja für das eigentliche Rechnen nicht mehr soviel Zeit aufwenden muss.

Möglicherweise kann man das Verständnis der Schüler dadurch erhöhen, dass man wichtige Beweise sehr gründlich und ausführlich studiert, so dass ein größeres Verständnis der Problemlösung erreicht wird.

In diesem zweiten Teil wollen wir die im ersten Teil praktizierte Vorgehensweise fortführen und im weiteren neue Grundbegriffe erläutern und wesentliche Anwendungen darstellen.

2 Vektoren und Matrizen

2.1 Vektoren

Ein Vektor ist eine geordnete Zusammenfassung von Daten als Zeile oder als Spalte; man spricht von einem *Zeilen-* oder *Spaltenvektor*:

$$\mathbf{u} = (a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}.$$

Spezielle Vektoren sind der Nullvektor

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \tag{2.1}$$

und die Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1) \quad \text{für } n = 2. \tag{2.2}$$

sowie

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \quad \text{für } n = 3. \tag{2.3}$$

Im weiteren wollen wir oft $n = 2$ und $n = 3$ verwenden, weil sich diese Fälle leicht geometrisch interpretieren lassen bzw. zu kartesischen Koordinatensystemen führen und häufig benötigt werden.

2 Vektoren und Matrizen

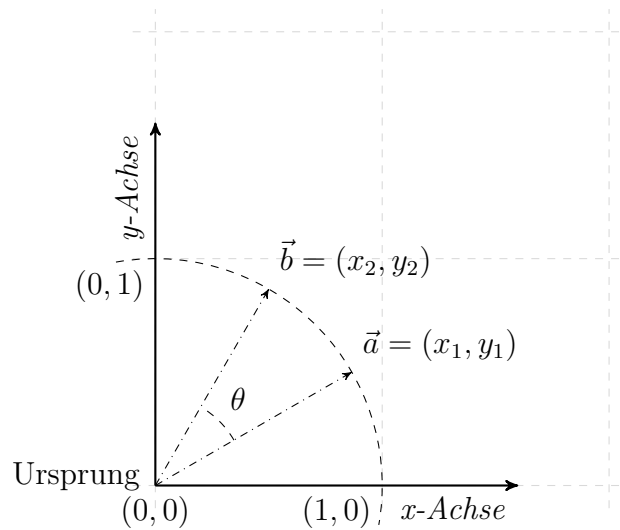


Abbildung 2.1: Zweidimensionale Vektoren

Abb. 2.1 zeigt, dass die Verbindung vom Ursprung zum Punkt, der durch die Komponenten des Vektors gegeben ist, das Wesen des Vektors bestimmt: der Vektor hat eine bestimmte Länge und zeigt in eine bestimmte Richtung.

Die *Addition und Subtraktion von Vektoren* geschieht komponentenweise:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \mathbf{x} \pm \mathbf{y} &= (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Wir können einen Vektor mit einer reellen Zahl multiplizieren, indem jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert wird:

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).\tag{2.5}$$

Diese Multiplikation erlaubt es, einen Vektor beliebig zu verkürzen ($0 < \lambda < 1$) oder zu verlängern ($\lambda > 1$), seine Richtung kann auch umgekehrt werden, wenn man ein $\lambda < 0$ verwendet.

Die Addition von zwei Vektoren ist vielleicht als *Kräfte-Parallelogramm* aus der Physik bekannt (siehe Abbildung 2.2). Die beiden gestrichelten Linien verlaufen parallel zu den Ausgangsvektoren und werden an der Spitze des anderen Vektors angetragen. Die Diagonale in dem entstehenden Parallelogramm ist dann die Summe der beiden gegebenen Vektoren.

2 Vektoren und Matrizen

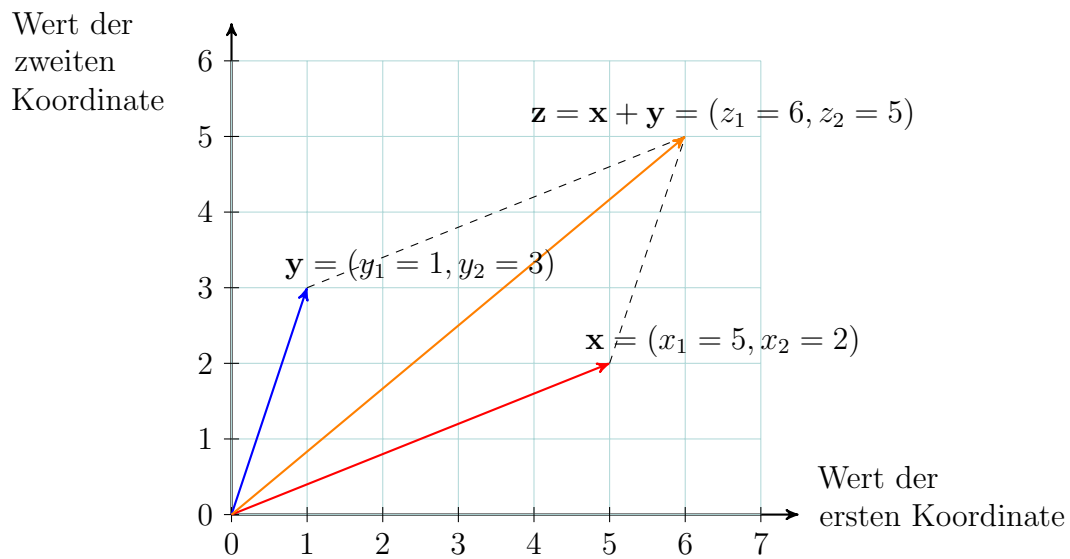


Abbildung 2.2: Addition von zwei Vektoren

Eine Kraft hat eine bestimmte Größe, ausgedrückt durch die Länge des Vektors, und eine Wirkung in einer bestimmten Richtung. Greifen an einem Punkt zwei Kräfte an, so ergibt die Addition der beiden Vektoren Größe und Richtung der Gesamtkraft.

Es ist ganz einfach, einen beliebigen Vektor mit Hilfe der Einheitsvektoren und deren Modifikation herzustellen.

Beispiel 2.1 Es sei $\mathbf{x} = (3, -2, 4)$. Dann addiert man einfach die „verlängerten“ Einheitsvektoren:

$$\mathbf{x} = 3 \cdot \mathbf{e}_1 - 2 \cdot \mathbf{e}_2 + 4 \cdot \mathbf{e}_3 .$$

Definition 2.1 Sind zwei Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ mit der gleichen Anzahl von Komponenten gegeben, dann ist

$$s = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n \quad (2.6)$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

Es werden jeweils die Vektorkomponenten mit dem gleichen Index miteinander multipliziert und die Produkte addiert, so dass am Ende ein einzelner Zahlenwert entsteht.

2 Vektoren und Matrizen

Man kann das Skalarprodukt bequem verwenden, um die *Länge eines Vektors* zu bestimmen. Man verwendet dazu das Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst. Es gilt beispielsweise für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (2.7)$$

Für die Länge des Vektors (seinen Betrag) schreibt man $|\mathbf{x}|$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.8)$$

Diese Definition gilt für jede Anzahl n von Komponenten:

Auch den Winkel zwischen zwei Vektoren kann man mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen. Es gilt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}| \cdot \cos \theta$, wobei θ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist.

Teilt man jede Komponente des Vektors durch den Betrag des Vektors, d.h. multipliziert man den Vektor $\mathbf{x}$ mit $1/|\mathbf{x}|$ (siehe Gleichung 2.7), dann entsteht ein Vektor, der die Länge 1 und die gleiche Richtung wie der Vektor $\mathbf{x}$ besitzt.

Man kann diese Betrachtung noch ein wenig verallgemeinern. Man kann sich einen Punkt in der Ebene (oder im drei- oder n -dimensionalen Raum) vorgeben und in diesem Punkt einen Richtungsvektor antragen. Dann erhält man in der Ebene alle Punkte einer Geraden durch Addition des Punktvektors und aller Vielfachen des Richtungsvektors.

Definition 2.2 *Es sei $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ und $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$, dann ist dadurch eine Gerade bestimmt, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht und die durch (t_x, t_y) bestimmte Richtung besitzt. Die Punkte der Geraden erhält man durch*

$$\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

wenn λ eine beliebige reelle Zahl ist.

Für 3-dimensionale oder n -dimensionale Vektoren verallgemeinert man diese Definition entsprechend.

Eine wichtige Eigenschaft ist die *Orthogonalität von Vektoren*.

2 Vektoren und Matrizen

Definition 2.3 Zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind zueinander orthogonal genau dann, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist.

Im besonderen sind die Einheitsvektoren zueinander orthogonal, aber man findet leicht beliebige weitere Beispiele. Bei Geraden reicht es natürlich aus, wenn die jeweiligen Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren wird hauptsächlich in der Physik und speziell in der Elektrodynamik angewendet.

Zwei gegebene Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ werden als Spaltenvektor aufgeschrieben und mit den drei Einheitsvektoren zu einer *Determinante* zusammengefasst (siehe den nächsten Abschnitt):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ohne uns hier weiter mit der Theorie der Determinanten zu beschäftigen, können wir das Kreuzprodukt in folgender Weise berechnen: man beginnt mit dem Element $\mathbf{e}_1$ und streicht die zum Element gehörende Zeile und Spalte. Der verbleibende Rest wird mit diesem Element (symbolisch) multipliziert:

$$\mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Die Vorzeichen sind wie die schwarzen und weißen Felder auf einem Schachbrett verteilt. Deshalb wird $\mathbf{e}_2$ mit einem negativen und $\mathbf{e}_3$ mit einem positiven Vorzeichen verwendet. Ansonsten bleibt die Reduktion um eine Zeile und eine Spalte.

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

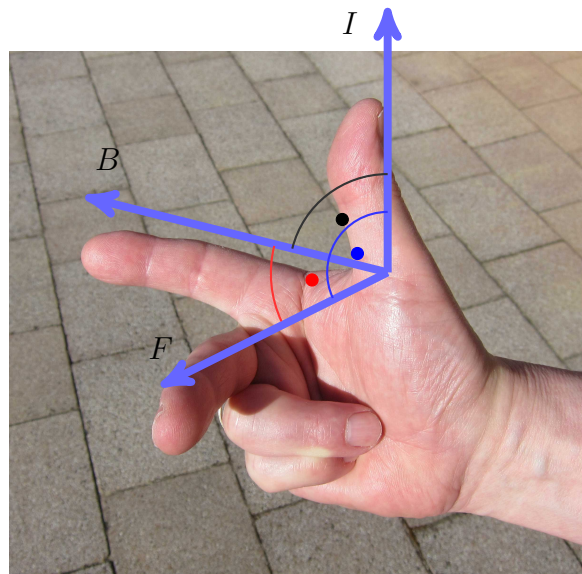


Abbildung 2.3: Drei-Finger-Regel der rechten Hand für elektrischen Leiter im Magnetfeld

Für diese Determinanten der Größe 2×2 kann man nun eine Rechenvorschrift definieren. Man multipliziert die Elemente der Hauptdiagonale und subtrahiert davon das Produkt der Elemente in der Nebendiagonale. Man erhält

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1) . \quad (2.10)$$

Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ besitzen die gleiche Orientierung wie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Der Ergebnisvektor steht senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren. Eine ganze Reihe von Erscheinungen in der Elektrotechnik können mit Hilfe der sogenannten *Drei-Finger-Regel* veranschaulicht werden, die gerade die Richtungen dieser drei Vektoren durch Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand veranschaulicht und denen man bestimmte physikalische Bedeutungen zuordnen kann.

Abbildung 2.3 zeigt die Anwendung der Drei-Finger-Regel für einen elektrischen Leiter in einem Magnetfeld. Der Daumen zeigt in die Richtung des Stromflusses I durch den Leiter und spannt mit dem Zeigefinger, der in Richtung des Magnetflusses B zeigt, eine Fläche auf. Der senkrecht auf dieser gedachten Fläche stehende Mittelfinger der rechten Hand zeigt in Richtung der wirkenden Kraft F , deren Wert sich aus dem Kreuzprodukt $I \times B$ ergibt. Elektromotoren arbeiten nach diesem Prinzip.

2 Vektoren und Matrizen

In der Ebene definieren die beiden Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ ein Parallelogramm. Sein Flächeninhalt ist bestimmt durch

$$\left| \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right| = |\vec{\mathbf{a}}| \cdot \left| \vec{\mathbf{b}} \right| \cdot \sin(\theta) \ , \quad (2.11)$$

wobei θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{\mathbf{a}}$ und $\vec{\mathbf{b}}$ ist.

2.2 Matrizenrechnung - Lineare Gleichungssysteme

Ein Vektor $\mathbf{x}$ von n Komponenten ist gegeben durch $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, wobei die x_i beliebige Zahlen sein können. Sind m derartige Vektoren gleicher Länge vorhanden, dann kann man sie zu einer *Matrix* der Größe $m \times n$ zusammenfassen:

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Der erste Index bestimmt die Nummer der Zeile, der zweite die Nummer der Spalte. Ist $m = n$, dann handelt es sich um eine *quadratische Matrix*.

Man sucht im Internet wieder ein Programm für die Arbeit mit Matrizen und wählt beispielsweise <https://matrixcalc.org/de/>. Man beginnt die Arbeit mit der Eingabe einer Matrix; horizontal werden die Elemente durch Betätigen der Leertaste getrennt, eine neue Zeile erhält man mit der *Enter-Taste*.

Als erstes betrachten wir die *Addition* und die *Multiplikation* von Matrizen. Für diese Operationen müssen die beiden Matrizen die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten besitzen. Dann gilt:

$$M = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Beispiel 2.2 Dieses Beispiel verwendet zwei Matrizen der Größe 3×3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

2 Vektoren und Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nun wenden wir uns der Definition der Multiplikation von Matrizen zu. Wir verwenden zwei Matrizen A und B mit der wichtigen Eigenschaft: die Spaltenzahl der ersten Matrix A ist gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix B .

Beispiel 2.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis $C = A \cdot B$ ist eine 2×2 - Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Deren Elemente werden auf folgenden Weise berechnet:

- c_{11} ist das Skalarprodukt der ersten Zeile von A und der ersten Spalte von B .

Im vorliegenden Beispiel erhält man

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 13 = 62.$$

- c_{12} ist das Skalarprodukt der ersten Zeile von A und der zweiten Spalte von B :

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 9 = 42.$$

- c_{21} ist das Skalarprodukt der zweiten Zeile von A und der ersten Spalte von B :

$$c_{21} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 13 = 119.$$

2 Vektoren und Matrizen

- c_{22} ist das Skalarprodukt der zweiten Zeile von A und der zweiten Spalte von B :

$$c_{22} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 9 = 88 .$$

Also gilt insgesamt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 & 42 \\ 119 & 88 \end{pmatrix} .$$

Man muss sich diesen Mechanismus nur einmal durchdenken, danach kann man das System in Anspruch nehmen.

Bei Zahlen kann man die beiden Faktoren eines Produktes ohne weiteres vertauschen. Das ist aber bei Matrizen *nicht* der Fall. Berechnet man in unserem Fall das Produkt $B \cdot A$ - das ist möglich, weil die Spaltenzahl von B gleich der Zeilenzahl von A ist - dann erhält man eine 4×4 - Matrix:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 15 & 37 & 51 \\ 5 & 6 & 19 & 26 \\ 22 & 27 & 84 & 115 \end{pmatrix} .$$

Schreibt man die Zeilen- und Spaltenanzahl für jede der beiden Matrizen auf, dann hat man bei $A \cdot B$ die Situation $(2 \times 4) \cdot (4 \times 2)$. Die beiden Werte 4 zeigen an, dass das Kriterium für die Multiplikation erfüllt ist, die beiden Werte 2 zeigen die Größe der Ergebnismatrix.

Bei $B \cdot A$ liegt eine Anordnung $(4 \times 2) \cdot (2 \times 4)$ vor; auch hier ist die Multiplikation möglich, das Ergebnis ist aber eine Matrix der Größe 4×4 . Also gilt

$$A \cdot B \neq B \cdot A . \quad (2.14)$$

Fügt man jetzt zu A eine Zeile hinzu, dann erhält man eine Matrix der Größe 3×4 , die man mit B multiplizieren kann: $(3 \times 4) \cdot (4 \times 2)$ ist möglich.

$B \cdot A$ besitzt nach dieser Ergänzung um ein Zeile die Konstellation $(4 \times 2) \cdot (3 \times 4)$, die keine Multiplikation erlaubt.

Handelt es sich um eine quadratische Matrix

2 Vektoren und Matrizen

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

dann ist natürlich die Zeilenzahl gleich der Spaltenzahl, und man kann auch $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A \cdot A = A^3$, ... berechnen. Die Addition und Subtraktion ist immer möglich, *wenn die Zeilenzahl und die Spaltenzahl der beiden Matrizen übereinstimmen*: man addiert bzw. subtrahiert nämlich die Elemente, die an der gleichen Stelle stehen.

Wir wollen weitere nützliche Konzepte definieren. Wenn man Zeilen und Spalten einer Matrix miteinander vertauscht, dann erhält man die *transponierte Matrix*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Ebenfalls möglich ist die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot 3 & \lambda \cdot 4 \\ \lambda \cdot 2 & \lambda \cdot 4 & \lambda \cdot 7 \\ \lambda \cdot 3 & \lambda \cdot 5 & \lambda \cdot 7 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Jedes Element der gegebenen Matrix wird mit λ multipliziert.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für Matrizen sind lineare Gleichungssysteme.

Beispiel 2.4 *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Die Variablen spielen für die Rechnung keine Rolle. Es wird nur die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2 Vektoren und Matrizen

benötigt. Die Lösung eines Systems besteht darin, dass man den Variablen x_1, x_2, x_3 solche Werte zuweist, dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

1. Schritt: man multipliziert die erste Zeile mit -2 und addiert sie zur zweiten Zeile; man erhält

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 3. \end{pmatrix}$$

2. Schritt: man multipliziert die erste Zeile mit -2 und addiert sie zur dritten Zeile; man erhält

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1. \end{pmatrix}$$

3. Schritt: man multipliziert die zweite Zeile mit 1 und addiert sie zur dritten Zeile; man erhält

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 1. \end{pmatrix}$$

Damit ist eine Diagonalform erreicht, jetzt kann man die Werte für die einzelnen Variablen in umgekehrter Reihenfolge berechnen;

$$\begin{aligned} -13 \cdot x_3 &= 1 & \Rightarrow & x_3 = -\frac{1}{13} \\ -x_2 - 5 \cdot \frac{-1}{13} &= 0 & \Rightarrow & x_2 = \frac{5}{13} \\ 2x_1 + 3 \cdot \frac{5}{13} + 7 \cdot \frac{-1}{13} &= 1 & \Rightarrow & x_1 = \frac{5}{26} \end{aligned}$$

Eventuell wird man aufgefordert, für die Lösung eine Matrix zu verwenden, die in der Hauptdiagonalen immer den Wert 1 besitzt. Das ist einfach: man teilt jede Zeile der Matrix durch den Wert, der in der Hauptdiagonalen teilt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{13}. \end{pmatrix}$$

2 Vektoren und Matrizen

Dieses Verfahren geht auf C. F. Gauß zurück. Es kann auch angewendet werden, um die inverse Matrix A^{-1} zu bestimmen. Hierzu muss man das Gleichungssystem lösen, das durch die folgende Matrixgleichung beschrieben wird.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Für die obige Matrix A erhält man

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{26} & +\frac{31}{26} & -\frac{4}{13} \\ +\frac{6}{13} & -\frac{8}{13} & +\frac{5}{13} \\ +\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

In dieser Matrix kann $\frac{1}{26}$ ausgeklammert werden; das ergibt

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} -33 & +31 & -8 \\ +12 & -16 & +10 \\ +8 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gibt man die ursprüngliche Matrix A in das System ein und fordert vom System die Berechnung der Determinante, so erscheint gerade dieser Wert 26:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 26.$$

Sie entscheidet darüber, ob das Gleichungssystem eine Lösung besitzt oder nicht. Wenn man das System benutzt, ist das aber nicht besonders wichtig. Dass eine Determinante gleich 0 ist, wird vom System automatisch gemeldet. In diesem Fall kann eine Gleichung durch Kombination anderer Gleichungen erhalten werden, so dass die Anzahl der Gleichungen in Wirklichkeit kleiner als n ist. Den Algorithmus zur Berechnung einer Determinante muss „nur noch“ dem Programmierer des Systems bekannt sein. Vor dem Auftauchen von Computern war die Berechnung von Determinanten schwierig, und es wurden für diesen Zweck viele scharfsinnige Algorithmen entwickelt.

Eine Determinante kann man *für jede* quadratische Matrix berechnen. Das wurde schon einmal beim Kreuzprodukt von Vektoren für die Dimension 3×3 angedeutet. Wir gehen zur Entwicklung eines allgemeinen Verfahrens *induktiv* vor, wir beginnen mit einer Matrix 2×2 :

$$A = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix},$$

2 Vektoren und Matrizen

dann gilt:

$$\det(A) = x_{11} \cdot x_{22} - x_{21} \cdot x_{12} . \quad (2.18)$$

Man berechnet das Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) und subtrahiert davon das Produkt der Elemente in der Nebendiagonalen (von links unten nach rechts oben).

Die Berechnung der Determinante einer Matrix 3×3 wird auf die Berechnung von Determinanten der Größe 2×2 zurückgeführt. Dazu wählt man eine Zeile oder Spalte aus, nach der man die Determinante durch *Entwicklung* berechnen kann. Es sei etwa A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wir wählen etwa die erste Zeile als Entwicklungszeile:

$$\det(A) = |A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} .$$

Die Determinanten der Größe 2×2 haben wir bereits berechnet, so dass die Aufgabe gelöst ist. Man kann jede Zeile und jede Spalte für die Entwicklung wählen, man muss aber beachten, dass die Vorzeichen der Koeffizienten schachbrettartig verteilt sind:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} .$$

Die Elemente der Entwicklungszeile oder -spalte sind entsprechend diesem Schema mit $+1$ oder -1 zu multiplizieren. Wenn man mit Hand rechnet, sucht man sich zur Vereinfachung noch die Zeile mit „vielen“ Nullen aus.

Für größere Matrizen wird das Verfahren so fortgesetzt. Für $n = 4$ entwickelt man wieder nach einer Zeile oder Spalte und muss dann vier Determinanten der Größe 3×3 berechnen usw. usf. Die Berechnung dieser Determinanten ist also langwierig. Hier ist das System wieder eine echte Hilfe. Wir betonen hier die Eigenschaft, dass

$$\det(A) \neq 0 \quad (2.19)$$

die Bedingung dafür ist, dass eine inverse Matrix existiert und das lineare Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

2 Vektoren und Matrizen

Es soll noch der Fall erwähnt werden, dass die gegebene Matrix eine quadratische Matrix ist, aber auf der rechten Seite nur der Wert 0 auftaucht:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es handelt sich dann um ein *System homogener Gleichungen*. Ein solches System hat immer die *triviale Lösung* $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Falls man derartige Gleichungen auf nichttriviale Lösungen untersucht oder falls die Anzahl der Zeilen der Matrix kleiner ist als die Zahl der Spalten oder falls Zeilenvektoren *linear voneinander abhängig* sind, dann muss man die Theorie der linearen Gleichungssysteme genauer studieren. Zentraler Punkt für Algorithmen zur Lösung solcher Systeme ist der *Gaußsche Algorithmus*, den man in den unterschiedlichsten Varianten finden kann.

Zur Veranschaulichung ein (sehr) kleines Beispiel.

Beispiel 2.5 *Gegeben seien zwei Gleichungen mit drei Unbekannten:*

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 1 . \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen der Variablen kann man weglassen, man schreibt nur die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Jetzt soll das Element $a_{11} = 1$ sein. Das ist hier sehr einfach, man vertauscht einfach die erste und die zweite Zeile. Nach der Vertauschung der beiden Zeilen entsteht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Um den Wert 0 für a_{21} zu erreichen, multipliziert man die erste Gleichung mit -2 und addiert sie zur zweiten Gleichung. Das beruht auf zwei sehr natürlichen Gesetzen:

- *Man kann eine lineare Gleichung mit einer reellen Zahl $\lambda > 0$ multiplizieren, ohne dass sich die Gleichheit ändert.*

2 Vektoren und Matrizen

- Man kann zwei lineare Gleichungen, die von denselben Variablen abhängen, zueinander addieren.

Damit erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} .$$

Jetzt teilen wir die zweite Zeile der letzten Matrix noch durch 3, das ergibt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Bis hierher hat sich nur die Darstellung der Gleichungen geändert, aber nichts an deren Lösungen. In der Diagonale, die links oben bei a_{11} beginnt, steht nur der Wert 1, links davon nur der Wert 0. Kehren wir noch einmal zu den Gleichungen zurück. Sie haben jetzt das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ y - \frac{5}{3}z &= -\frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Mehr Information können wir nicht aus diesen beiden Gleichungen gewinnen. Ein sehr typischer Schritt ist nun die Verwendung eines Parameters: wir setzen $y = t$ und beseitigen damit diese Unbekannte:

$$\begin{aligned} x - t + 2 \cdot z &= 1 \\ t - \frac{5}{3} \cdot z &= -\frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Damit sind wir wieder bei einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und z angelangt. Die Lösung dieses Systems ergibt dann zusammen mit $y = t$ die Lösungen

$$x = \frac{3-t}{5} \quad y = t \quad z = \frac{3t+1}{5} .$$

Man erhält also unendlich viele Lösungen x, y, z , wobei die Werte für die drei Variablen durch den Parameter t miteinander verkoppelt sind. Wir übersetzen

2 Vektoren und Matrizen

das Ergebnis noch einmal in das Format von Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} .$$

Es stellt sich heraus, dass alle Lösungen auf einer Geraden liegen: der erste Vektor $(3/5, 0, 1/5)$ ist ein Punkt im 3-dimensionalen Raum, der zweite Vektor $(-1/5, 1, 3/5)$ ein Richtungsvektor, für t kann man jede beliebige reelle Zahl einsetzen.

Es sind noch einige weitere Matrixfunktionen vorhanden, die es erlauben, einzelne Elemente, Spalten oder Zeilen auszuwählen oder die es ermöglichen, Teilmatrizen zu spezifizieren. Diese sollen dann erläutert werden, wenn sie gebraucht werden. Bei Interesse kann man sie auch gelegentlich ausprobieren.

Wir erwähnen hier noch die *Spur* einer Matrix. Darunter versteht man die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten).

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ergibt einen neuen Vektor, dessen Länge und Richtung von dem zur Multiplikation verwendeten Vektor verschieden ist. Es kann aber auch sein, dass die Richtung des Ergebnisses sich nicht geändert hat, sondern nur die Länge. Man sucht also für eine gegebene Matrix A und einen gegebenen Wert λ Lösungen der Gleichung

$$A \cdot v = \lambda \cdot v. \tag{2.20}$$

Das kann man umformen zu

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot v = 0.. \tag{2.21}$$

Wir verwenden die folgende Beispielmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} .$$

2 Vektoren und Matrizen

Dann hat $A - \lambda \cdot E$ die folgende Gestalt:

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 & 7 \\ 4 & 5 - \lambda & 9 \\ 4 & 7 & 6 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante durch Entwicklung nach der ersten Zeile und erhalten das folgende Polynom:

$$-\lambda^3 + 13\lambda^2 + 61\lambda + 26.$$

Das besitzt die drei Lösungen (Eigenwerte) $\lambda_1 \approx -2,630$, $\lambda_2 \approx -0,609$, $\lambda_3 \approx 16,239$. Wiederum ist das System eine große Hilfe!

Man erhält die folgenden drei Eigenvektoren

$$\begin{aligned} v_1 &\approx (-1, 132, -0,586, 1) \\ v_2 &\approx (-4, 660, -1,719, 1) \\ v_3 &\approx (0,714, 0,55, 1) \end{aligned}$$

Die Richtung dieser drei Vektoren wird durch Multiplikation mit der Matrix nicht verändert. Jede Verlängerung oder Verkürzung eines Eigenvektors ergibt wieder einen Eigenvektor.

Sehr einfach zu definieren ist die Eigenschaft der *Symmetrie*. Eine Matrix A ist dann symmetrisch, wenn sie gleich der transponierten Matrix A^T ist. Dann sind die Elemente *spiegelsymmetrisch* längs der Hauptdiagonalen.

- Ist A symmetrisch, dann ist auch $\lambda \cdot A$ symmetrisch-
- Sind A und B symmetrische Matrizen, dann sind auch $A \pm B$ symmetrisch.

Eine Matrix ist *schiefsymmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*, falls gilt:

$$A = -A^T. \tag{2.22}$$

Bei einer symmetrischen Matrix muss man nur die Werte in der Hauptdiagonalen und die Werte unterhalb (oder oberhalb) der Hauptdiagonalen kennen. Symmetrische Matrizen benötigen also für großes n wesentlich weniger Speicherplatz als nichtsymmetrische Matrizen.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1 Gegeben seien die drei Vektoren

$$\mathbf{x} = (-2, 1, 3), \mathbf{y} = (3, -1, \pi), \mathbf{z} = (\sqrt{2}, 1/5, -2/3) .$$

Gib eine Schrittfolge an, mit der man günstig der Reihe nach $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{y}|$, $|\mathbf{z}|$ sowie die Skalarprodukte $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ und $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ berechnet!

Aufgabe 2.2 Für welche Werte von v ist $(-2, 1, 3)$ orthogonal zu $(1, v, v)$?

Aufgabe 2.3 Berechne $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ für $\vec{\mathbf{a}} = (1, -3, \sqrt{2})$ und $\vec{\mathbf{b}} = (-1, 1/2, \pi)$.

Aufgabe 2.4 Berechne $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ für $\vec{\mathbf{a}} = (-2i, 1, 3 + 3i)$ und $\vec{\mathbf{b}} = (1 + 8i, 1 - i, 2 + \pi i)$.

Aufgabe 2.5 Wie verhalten sich $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$ zueinander?

Aufgabe 2.6 Berechne die inverse Matrix zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kann man das Problem auch für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & v \\ -3 & -v & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

lösen?

Aufgabe 2.7 Gegeben seien der Spaltenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 Vektoren und Matrizen

und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x}$.

Auf Aufgaben zur Lösung linearer Gleichungssysteme wollen wir verzichten, da sie ja mit dem verwendeten Programm problemlos behandelt werden können.

2.4 Lösungen

Lösung 2.1 *Der wichtigste Schritt besteht hier darin, dass man die drei Vektoren durch Variable kennzeichnet:*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \{-2, 1, 3\}, \\ \mathbf{y} &= \{3, -1, \pi\}, \\ \mathbf{z} &= \{\sqrt{2}, 1/5, -2/3\}.\end{aligned}$$

Um den absoluten Betrag eines Vektors zu berechnen, verwenden wir die Formel

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

oder das Programm. Dort wählen wir als Operation die Matrixmultiplikation und geben den Vektor einmal als Zeilenvektor und einmal als Spaltenvektor ein.

$$\begin{aligned}|x| &= \sqrt{14} && \approx 3,74 \\ |y| &= \sqrt{19,860} && \approx 4,46 \\ |z| &= \sqrt{2,475} && \approx 1,573.\end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt verfahren wir genauso, geben aber zwei verschiedene Vektoren ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 4,42 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} &= -4,07 \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} &= -6,11.\end{aligned}$$

2 Vektoren und Matrizen

Lösung 2.2 Hier muss man sich nur daran erinnern, dass zwei Vektoren dann zueinander orthogonal sind, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es muss also $-2 \cdot 1 + 1 \cdot v + 3 \cdot v = 0$ gelten. Ohne das System zu bemühen, erhält man $v = 1/2$.

Lösung 2.3 Wir erinnern uns an die Formel für das Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_3 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Es ist $\vec{a} = (1, -3, \sqrt{2})$ und $\vec{b} = (-1, \frac{1}{2}, \pi)$. Dann setzt man die entsprechenden Werte für die Komponenten ein und erhält

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} - \pi \\ \pi - 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 2.4 Es ist $\vec{a} = (-2i, 1, 3 + 3i)$ und $\vec{b} = (1 + 8i, 1 - i, 2 + \pi \cdot i)$.

Setzt man die gegebenen Werte ein, erhält man

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (2 + \pi i) - (3 + 3i)(1 - i) \\ (3 + 3i)(1 + 8i) - (-2i)(2 + \pi i) \\ (-2i)(2 + \pi i) - 1 \cdot (1 + 8i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + \pi i \\ -21 - 2\pi + 31i \\ 2\pi - 1 - 12i \end{pmatrix}.$$

Lösung 2.5 Bei einer solchen Aufgabe ist es (wie immer) sehr hilfreich, mit einem Beispiel zu beginnen. Man gibt beispielsweise $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (4, 5, 6)$ ein und berechnet danach $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$.

Die beiden Ergebnisse $\{-3, 6, -3\}$ und $\{3, -6, 3\}$ legen den Verdacht nahe, dass

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (2.24)$$

ist. Um das allgemein nachzuweisen, verwendet man die Definition des Kreuzproduktes in Gleichung (2.12) und erhält direkt Gleichung (2.26).

2 Vektoren und Matrizen

Lösung 2.6 Für die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet man ein Programm und erhält das Ergebnis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/4 & -17/12 & -2/3 \\ 1/2 & 5/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich kann man noch feststellen, dass $\det(A)=12$ gilt.

Bei der zweiten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & v \\ -3 & -v & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

sieht man, dass das System auch gute Fähigkeiten besitzt, um mit Variablen zu rechnen. Die Eingabe dieser Matrix führt zum Ergebnis

$$A^{-1} = \frac{1}{6v^2 - 7v - 4} \begin{pmatrix} 2 - v & 2v - 2 & v^2 - 2 \\ -3 & 1 - 6v & 1 - 3v \\ 6v - 6 & 10 & 6 - v \end{pmatrix}.$$

Die Determinante $6v^2 - 7v - 4$ muss wiederum ungleich 0 sein.

Lösung 2.7 Man gibt $\mathbf{x}$ und A so wie gegeben ein. Dann ist $\mathbf{x}^T \cdot A = (-1, 6, 0)$, und das Skalarprodukt mit dem Vektor x ergibt den Wert 11.

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

3.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie umfasst die Formalisierung, die Modellierung und die Untersuchung von zufälligen Ereignissen. Die Statistik beobachtet derartige zufällige Ereignisse und versucht, daraus Schlussfolgerungen zu ziehen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

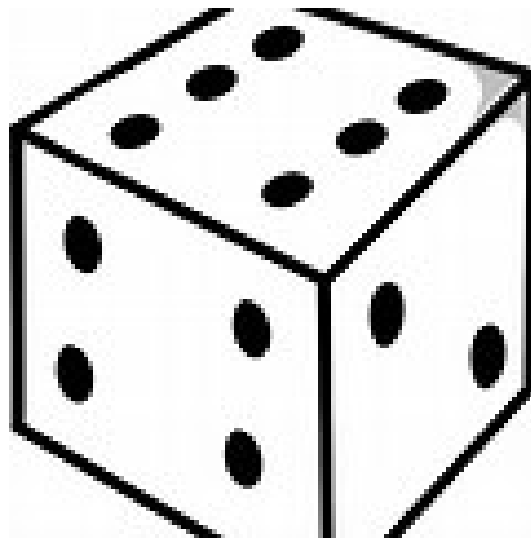


Abbildung 3.1: Ein einfacher Spielwürfel

Beispiel 3.1 *Die Punktezahl auf einer Würfelfläche liegt zwischen 1 und 6. Würfelt man einmal, dann erscheint einer dieser Werte, man weiß aber vorher nicht, welcher Wert erscheint. Es sind aber die zwei folgenden Eigenschaften ganz offensichtlich:*

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

1. Einer der Werte 1 bis 6 muss erscheinen. Diese Werte sind die Elementarereignisse. Beim Würfel sind 6 Elementarereignisse gegeben. Damit kann man die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis mit $\frac{1}{6}$ ansetzen,

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}.$$

2. Einer dieser Werte muss erscheinen:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1.$$

Die Menge der Elementarereignisse bezeichnet man meistens mit Ω . Also ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Menge aller möglichen Ereignisse. Alle Operationen mit Mengen können angewendet werden; deshalb bezeichnet man diese Potenzmenge zusammen mit den Mengenoperationen als Ereignisalgebra.

Die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den Elementarereignissen bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsverteilung.

3. Jede Teilmenge von Ω ist ein Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Elemente der Teilmenge addiert. Man definiert beispielsweise das Ereignis „es wird eine gerade Zahl gewürfelt“, dann erhält man die Teilmenge $\{2, 4, 6\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Bei diesem Beispiel hat man die Voraussetzung eingeschmuggelt, dass das Ergebnis für alle Zahlen gleich wahrscheinlich ist. Das muss aber durchaus nicht der Fall sein. Diese Voraussetzung geht auf den französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749-1827) zurück. Man kann sie auch so ausdrücken:

$$p(A) = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}. \quad (3.1)$$

Ein häufig verwendetes Beispiel ist das Werfen einer Münze mit dem Ergebnis

- Das Wappen zeigt nach oben.
- Die Zahl zeigt nach oben.

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Dann hat jedes Ereignis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Welche Vorstellung kann mit einem solchen Wahrscheinlichkeitswert verbinden? Der Wert jedes nächsten Wurfes bleibt unbestimmt. Man kann nur sagen: wenn man hinreichend lange würfelt, liegt der Wert für jede Zahl bei $\approx \frac{1}{6}$, weiter nichts. Wirft man die Münze hinreichend oft, liegen die Werte von Wappen und Zahl bei $\approx \frac{1}{2}$.

Der russische Mathematiker A. N. Kolmogorov (1903 . 1987) führte das folgende Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein:

1. **Axiom 1.** Jede Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist größer oder gleich 0:

$$p(E) \geq 0. \quad (3.2)$$

2. **Axiom 2.** Ein sicheres Ereignis E hat den Wahrscheinlichkeitswert 1.

$$p(E) = 1. \quad (3.3)$$

3. **Axiom 3.** Lässt sich ein Ereignis in disjunkte Teilereignisse zerlegen, dann addieren sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse: Es sei $E = E_1 \cup E_2$ und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dann ist

$$p(E) = p(E_1) + p(E_2). \quad (3.4)$$

Beispiel 3.2 Für den Würfel sei $E_1 = \{1, 3\}$ und $E_2 = \{4, 6\}$: dann ist $p(E_1) = \frac{1}{3}$, $p(E_2) = \frac{1}{3}$, $E_1 \cup E_2 = E = \{1, 3, 4, 6\}$ und $p(E) = \frac{2}{3}$.

$\overline{E_1}$ ist das Komplement der Menge E , also $\overline{E_1} = \{2, 4, 5, 6\}$. Dann gilt:

$$p(\overline{E_1}) = 1 - p(E). \quad (3.5)$$

Weitere Rechenregeln lassen sich hieraus ableiten; beispielsweise gilt

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \quad (3.6)$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Sowohl beim Münzenwurf als auch beim Würfel können nur einzelne Zahlen als Wahrscheinlichkeit auftreten. Deshalb heißen derartige Wahrscheinlichkeitsverteilungen *diskrete Verteilungen*.

Sind zwei Ereignisse A und B *voneinander unabhängig*, dann kann man ihre Wahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B). \quad (3.7)$$

Sehr wichtig ist der Begriff der *bedingten Wahrscheinlichkeit*. Man drückt sie aus durch $p(A|B)$ oder durch $p_B(A)$, mit der Sprechweise: die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass das Ereignis B schon eingetreten ist.

Beispiel 3.3 *In einer Urne befinden sich 5 weiße und 5 schwarze Kugeln. Im ersten Zug beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen oder einer schwarzen Kugel jeweils $\frac{5}{10}$. Das ändert sich im zweiten Zug, wenn die Kugel nicht wieder zurückgelegt wird. Wurde im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen, dann zieht man im zweiten Zug eine weiße Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9} \approx 0,44 \dots$ eine schwarze mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9} \approx 0,66 \dots$. Das ist sehr einleuchtend: wird die Anzahl der weißen Kugeln geringer, wird das Ziehen einer weißen Kugel seltener,*

Für die Berechnung bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet man die folgende Beziehung:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}. \quad (3.8)$$

Auf Bayes geht das folgende Theorem zurück: für zwei Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist, durch die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist, errechnen:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B)}. \quad (3.9)$$

Wikipedia bietet das folgende Beispiel an: Es sei

- A das Ereignis „Die Kugel stammt aus Urne A“,

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- B das Ereignis „Die Kugel stammt aus Urne B“,
- R das Ereignis „Die Kugel ist rot“.

Dann gilt der Reihe nach

- $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$
- $p(R|A) = \frac{7}{10}$.
- $p(R|B) = \frac{1}{10}$.

Damit gilt

$$p(R) = p(R|A) \cdot p(A) + p(R|B) \cdot p(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

Der Wert $\frac{2}{5}$ ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine rote Kugel zu ziehen. Für $p(A|R)$ gilt dann:

$$p(A|R) = \frac{p(R|A) \cdot p(A)}{p(R)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{8}.$$

Drückt man die Wahrscheinlichkeit als Prozentwert aus, dann sind das 87,5%. Das entspricht wiederum vollständig der Anschauung.

Beim Münzenwurf oder beim Würfeln hat man die Vorstellung, dass die relative Häufigkeit sich an die Wahrscheinlichkeit annähert, wenn ein Experiment hinreichend oft wiederholt wird. Eine zweite Interpretation geht auf den englischen Mathematiker Thomas Bayes (1701 - 1761) zurück). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses drückt in seinem System die subjektive Gewissheit aus, dass ein Ereignis eintritt.

Wir haben in der Aussagenlogik zwei Werte 0 und 1 verwendet, um die Wahrheit oder Falschheit eines Satzes zu bewerten. Nach der Anschauung von T. Bayes kann man diese Bewertungen abstufen; bewertet man einen Satz beispielsweise mit einem Wert von 0,25, so bedeutet das, dass die entsprechende Tatsache nicht völlig falsch ist, dass man aber nicht so recht an ihr Auftreten glaubt. Wird sie mit 0,75 bewertet, kann man ihre Wahrheit zwar nicht nachweisen, aber man ist der Meinung, dass dieser Sachverhalt wohl doch eintritt.

3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir kehren noch einmal zum Münzenwurf zurück, den wir jetzt viele Male wiederholen. Damit entsteht eine Folge

$$M, M, W, W, W, M, Z, Z, Z, W, Z, Z, W, \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit für Wappen oder Zahl ist bei dem Wurf gleich $\frac{1}{2}$. Die Würfe sind stets voneinander unabhängig. Eine solche Folge bezeichnet man als Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter $\frac{1}{2}$. Jetzt stellt sich die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfeln k -mal Wappen auftritt. Da Wappen und Zahl gleich wahrscheinlich sind, ist das einfach zu beantworten: man erhält die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$p(W_k, Z_{n-k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

da die beiden Versuchsausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, hat jede Folge die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Das ändert sich, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten voneinander verschieden sind. Man hat jetzt zwei Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$. p wird k -mal verwendet, $1 - p$ $n-k$ -mal. Die Positionen, an denen p verwendet wird, kann aber auf n Positionen verteilt werden. Die Anzahl der Positionen wird durch den Binomialkoeffizienten bestimmt, der schon früher erklärt wurde. Es gilt:

$$B(n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}. \quad (3.10)$$

Wegen der Verwendung der Binomialkoeffizienten heißt diese Verteilung *Binomialverteilung*.

Beispiel 3.4 *Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass mehr als dreimal die 6 erscheint, wenn sechsmal gewürfelt wird. Hierzu muss man die Werte $B(4, \frac{1}{2})$, $B(5, \frac{1}{2})$ und $B(6, \frac{1}{2})$ berechnet werden. Schon von der Anschauung her sieht man, dass der Wert nicht sehr groß sein kann; man empfindet die Ereignisse viermal, fünfmal oder sechsmal eine 6 zu würfeln, als selten. Berechnet man die einzelnen Werte, so erhält man $B(4, \frac{1}{2}) = 0,00804$, $B(5, \frac{1}{2}) = 0,00064$ und $B(6, \frac{1}{2}) = 0,00002$, also insgesamt den Wert 0,0087, was durchaus der Anschauung entspricht.*

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Die Werte von n und p sind die Parameter dieser Verteilung. Früher benutzte man große Tafelwerke für die Werte dieser Verteilung, heute werden die entsprechenden Programme zur Verfügung gestellt.

Die engste Verbindung zwischen Zufall und Glücksspiel ist wohl das Roulette.



Abbildung 3.2: Der Teil des Roulette-Spiels, in dem die Kugel rollt

Die Scheibe dreht sich, und es wird eine Kugel auf diese Scheibe geworfen, die letztendlich in ein Loch am Rande fällt. Jedes Loch wird durch eine Zahl zwischen 1 und 36 und durch die Farbe *rot* oder *schwarz* markiert.

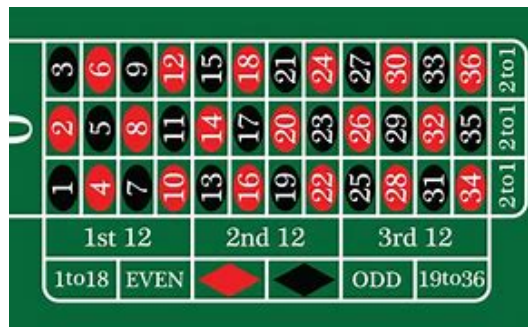


Abbildung 3.3: Hier werden die Einsätze platziert

Der Einsatz des Spielers wird auf das Feld, das in Abbildung 3.3 dargestellt ist, gelegt. Die Zahl 0 wird durch *grün* markiert und spielt eine besondere Rolle. (Beim amerikanischen Roulettes gibt es zusätzlich ein Loch mehr, das mit einer Doppelnull markiert ist.) Die Gewinne werden so berechnet, als ob die null nicht vorhanden ist. Es gilt also

$$p(\text{rot}) = p(\text{schwarz}) = \frac{18}{37} \approx 0,4864864864864865.$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Es gibt die folgenden Gewinnmöglichkeiten:

1. Setzt man auf *rot* oder *schwarz*, ist der Gewinn gleich dem Einsatz.
2. Setzt man auf *pair* (alle geraden Zahlen) oder *impair* (alle ungeraden Zahlen), ist der Gewinn ebenfalls gleich dem Einsatz.
3. Setzt man auf die Zahlen 1 bis 18 oder auf 19 bis 36, dann ist der Gewinn ebenfalls gleich dem Einsatz.
4. Man kann auch die Zahlen von 1 bis 12, von 13 bis 24 oder von 25 bis 36 wählen. Dann erhält der Spieler das Doppelte seines Einsatzes.
5. Schließlich kann man noch die erste, die zweite oder die dritte Spalte wählen. Dann erhält der Spieler ebenfalls das Doppelte seines Einsatzes.

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer Möglichkeiten, die man dann im Einzelnen studieren muss.

Was war die längste Serie einer einzelnen Zahl beim Roulette? Die längste, ununterbrochene Folge einer einzelnen Zahl beim Roulette war eine 7er Serie. Aber auch schon eine 6er Serie ist wirklich phänomenal. Hier einmal einige historische Sensationen:

- 09.06.1959 - El San Juan Casino, Carolina, Puerto Rico: 6x in Folge die 10
- 09.09.1993 - Casino Bristol, England: 7x in Folge die 4
- 29.02.2004 - Spielbank Bad Harzburg, Deutschland: 6x in Folge die 8
- 20.11.2006 - Spielbank Hannover, Deutschland: 6x in Folge die 18
- 18.06.2012 - Rio Hotel and Casino, Las Vegas, USA: 7x in Folge die 19

Das Jahrtausend-Ereignis im Rio Casino glänzte nicht nur dadurch, dass die Zahl 19 unfassbare 7x hintereinander erschien. Auch die Zahlen vor dieser Serie waren sehenswert. Die ganze Zahlenfolge inklusive der Serie:

0 - 20 - 20 - 23 - 5 - 20 - 20 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 19 - 15 - 19

Die Null einmal herausgenommen, fiel in 15 Coups 14x das 2. Dutzend und in diesem Dutzend mit einer Ausnahme nur die Transversale 19-24. Die 19 erschien insgesamt 8x, davon 7x in Folge als Serie. Aber auch die 20 war in diesem Permanenzverlauf ein Renner. Gleich 4x landete die Kugel in ihrem Fach. Besonders erwähnenswert ist die unglaubliche Serie des Cheval 19-20. In den letzten 15 Würfeln waren diese beiden Zahlen 12x vertreten, darunter als eine 9er Serie.

3.3 Zufallszahlen

3.4 Statistische Kennwerte

Statistik ist ein sehr umfangreiches Gebiet, das für verschiedene Fachrichtungen ein spezielles Studium erfordert. Ihre Konzepte und Methoden werden auf große Datenmengen angewendet, so dass man immer die Speicherung der Daten im Rechner und ihre Verarbeitung durch Programme im Auge haben muss.

Wir beschränken uns wiederum auf elementare Konzepte und deren Erklärung. Es ist große Vorsicht geboten bei der Anwendung dieser Konzepte. Sie verlieren vor allem an Bedeutung, wenn die Datenmengen zu klein sind. Ein Mittelwert von vier, fünf, sechs Zahlen hat keine Aussagekraft. Befragt man etwa 1000 Leute in einer Stadt von 100.000 Einwohnern, so steht eine Person für 100 Einwohner; ist es aber eine Stadt mit 1.000.000 Einwohnern, so steht jede Stimme für 1000 Einwohner. Vergleicht man die Ergebnisse dann beispielsweise durch Prozentsätze, so kommt man sehr schnell zu falschen Einschätzungen usw. Dies zu verhindern, ist aber Aufgabe der Anwendungsbereiche.

Jetzt steht also die Frage, welche Information man gewinnen kann, wenn große Datenmengen zur Verfügung stehen. Die Entwicklung der Künstlichen Intelligenz benutzt diese Möglichkeit in hervorragender Weise. Diese Betrachtungen verlegen wir in den Informatikkurs. Wir beginnen mit einfacheren Begriffen und Konzepten. Es wird dabei vorausgesetzt, dass zu einem bestimmten Sachverhalt eine große Menge an Daten vorhanden ist.

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Die einfachsten Begriffe sind das *Minimum* und das *Maximum* der vorhandenen Daten. Tabelle 3.1 zeigt die monatlichen durchschnittlichen Temperaturen für das Jahr vom November 2023 bis zum November 2024; das Minimum war die Temperatur im Januar 2024, das Maximum die Temperatur im August 2024. Sowohl die Zeitpunkte als auch die Werte waren durchaus völlig normal. Der Abstand zwischen Minimum und Maximum zeigt, ob der betrachtete Wert sehr stark schwankt oder nicht.

Tabelle 3.1: Die Temperaturen in den vergangenen 12 Monaten

November 2023	5,5°C
Dezember 2023	3,9°C
Januar 2024	1,5°C
Februar 2024	6,6°C
März 2024	7,5°C
April 2024	10,0°C
Mai 2024	14,9°C
Juni 2024	16,8°C
Juli 2024	18,9°C
August 2024	20,0°C
September 2024	15,3°C
Oktober 2024	11,1°C
November 2024	5,1°C

Sehr bekannt ist der *Mittelwert* einer Menge von Werten. Er wird gebildet, indem man die Werte addiert und dann durch die Anzahl der Elemente dividiert. Genauer gesagt müssen wir hier vom *arithmetischen Mittel* sprechen, entsprechend der folgenden Definition für eine gegebene Datenmenge $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (3.11)$$

Das arithmetische Mittel setzt eine Menge von Werten voraus, die der Größe nach geordnet werden können.

Sehr ausgefeilt sind die Methoden zur Bestimmung von Temperaturmittelwerten. Als *Tagesmitteltemperatur*, auch *Tagesdurchschnittstemperatur*, wird die Temperatur bezeichnet, welche im Laufe eines Tages auftritt. Die Tagesmitteltemperatur wird seit dem 1. April 2001 neu berechnet. Um sie zu erhalten,

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

muss der Mittelwert aller Temperaturen eines Tages herangezogen werden. Der Berechnungszeitraum beträgt 0 bis 24 Uhr. Die Temperatur, die in die Rechnung integriert wird, wird stets zur vollen Stunde, auch als Mannheimer Stunde bezeichnet, gemessen. Falls es zu technischen Ausfällen von drei Stundenwerten kommen sollte, wird die Tagesmitteltemperatur aus den Hauptterminen 0, 6, 12 und 18 Uhr berechnet (web.de). Die elementaren Daten sind also die 24 Temperaturwerte, die während eines Tages gemessen werden. Durch Mittelwert-Bildung kann man hieraus eine ganze Hierarchie von Daten bilden:

1. den Tagesdurchschnitt als Mittelwert der 24 Stunden,
2. den Wochendurchschnitt als Mittelwert über 7 Tage,
3. den Monatsdurchschnitt als Mittelwert über 28, 29, 30 oder 31 Tage.
4. den Jahresdurchschnitt als Mittelwert über 12 Monate.

Tabelle 3.1 zeigt die Monatsmitteltemperatur für die vergangenen 12 Monate. Im Internet findet man eine große Menge von Daten, die in Deutschland bis 1881 zurückgehen und die in unterschiedlichster Weise interpretiert werden (können).

Sehr oft rechnet man das Sortieren von Daten (aufsteigend oder absteigend) mit zu den statistischen Funktionen und baut diese Möglichkeit in entsprechende Programme mit ein. Im Handel ist man oft an den umsatzstärksten oder -schwächsten Monaten interessiert, Das kann man durch eine entsprechende Sortierung ganz einfach erreichen.

Das *geometrische Mittel* wird für ein Produkt der Zahlen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ als n -te Wurzel gebildet:

$$\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} . \quad (3.12)$$

Wenn man sich an die Definition der n -ten Wurzel erinnert, dann bedeutet die Definition in (3.12), dass man nach einer Zahl $\bar{x}_{\text{geom}}$ sucht, für die

$$\bar{x}_{\text{geom}}^n = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \quad (3.13)$$

gilt. Man verwendet es unter anderem, um für Wachstumsprozesse einen Mittelwert zu bestimmen.

Beispiel 3.5 Man startet beispielsweise mit einem Kapital von 100,00 € und erhält im ersten Jahr 1,2% Zinsen, im zweiten Jahr 1,01% und im dritten Jahr 1,005%. Wie groß ist der durchschnittliche Zinssatz über die drei Jahre hinweg? Dazu berechnet man das geometrische Mittel von 1,012, 1,0101 und 1,01005 und erhält den Wert $1.010716 \approx 1.011$ als durchschnittliches Wachstumsfaktor für die Periode von drei Jahren. Der durchschnittliche Zinssatz p ergibt sich nach der Beziehung $1.011 = 1 + p/100$ zu 1,1%.

Man setzt wieder eine sortierte Menge von Werten voraus. Der Median trennt die Werte in zwei Teile, die die gleiche Anzahl von Werten besitzen.

- Ist die Anzahl der Elemente ungerade, dann ist der Median das mittlere Element:

$$\text{median}(-20, 3, 5, 70, 90) = 5.$$

Die Anzahl der Elemente, die links vom Median liegen, ist gleich der Anzahl der Elemente, die rechts von ihm liegen. Extreme Abweichungen der Werte spielen dabei keine Rolle und können durchaus auftreten.

- Ist die Anzahl der Elemente eine gerade Zahl, so bleiben in der Mitte zwei Elemente übrig. Sehr oft nimmt man den Mittelwert dieser beiden Werte als Median. Soll der Median aber zur Datenmenge gehören, so kann man den linken Wert (den *unteren Median*) oder den rechten Wert (den *oberen Median*) verwenden:

$$\text{median}(-20, -10, 5, 10, 70, 90) = 15/2 \text{ oder } = 5 \text{ oder } = 10.$$

- Der *Modus* einer Menge von Daten ist der Wert, der am häufigsten vorkommt. Man kann ihn nur bestimmen, wenn für jeden auftretenden Wert seine Häufigkeit bestimmt und unter diesen Häufigkeiten das Maximum gesucht wird. Kommen mehrere Werte mit der gleichen Häufigkeit vor, dann werden alle diese Werte verwendet.
- Die Varianz beantwortet die Frage nach der Einschätzung des durchschnittlichen Abstandes der Daten vom Mittelwert. Hat man die Datenmenge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ zur Verfügung, dann verwendet man die Varianz:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.15)$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Die Quadrate werden deshalb verwendet, damit Abweichungen nach unten, die zu negativen Klammerinhalten führen, und Abweichungen nach oben gleichwertig behandelt werden. Wichtig ist die Tatsache, dass man mit der Varianz die Dimension ändert. Betrachtet man etwa die Körpergröße in cm, so „erzeugt“ die Quadrierung cm^2 , und das ist mit einigen Interpretationsschwierigkeiten verbunden. Deshalb verwendet man häufig die *Standardabweichung*, mit der man die Quadrierung annulliert:

$$s_x = \sqrt{s_x^2}. \quad (3.16)$$

Damit kann man dann die Abweichung vom Mittelwert einschätzen, und zwar in der gleichen Dimension wie die vorhandenen Werte.

- Verwendet man Daten, die eine größere Menge von Werten repräsentieren sollen, also einen Ausschnitt aus der Gesamtmenge, so steht die sogenannte *erwartungstreue* oder *unverzerrte* Varianz zur Verfügung.

$$\tilde{s}_x^2 = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \tilde{x})^2 + (x_2 - \tilde{x})^2 + \dots + (x_n - \tilde{x})^2) \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2. \quad (3.18)$$

Die Bezeichnung $\tilde{x}$ soll darauf hinweisen, dass es sich bei diesem Mittelwert um eine Näherung des Wertes der Gesamtmenge handelt. Die entsprechende Standardabweichung erhält man durch

$$\tilde{s}_x = \sqrt{\tilde{s}_x^2}. \quad (3.19)$$

Man muss beachten, dass hier durch $n-1$ dividiert wird.

Will man stochastische Probleme simulieren, dann braucht man Mengen von *Zufallszahlen*. Ihre Konstruktion ist ein schwieriges Problem. Am einfachsten stellt man sich darunter einen Mechanismus vor, wie man ihn etwa beim Roulette oder beim Lotto vorfinden sollte. Beim europäischen Roulette gibt es 37 Felder, auf die bei einer Ziehung eine Kugel durch einen Mechanismus platziert werden kann. Man arbeitet also mit einem Intervall $[0, 36]$. Das Ergebnis der nächsten Ziehung ist (bei einem *fairen* Apparat) eine zufällige Zahl aus diesem Intervall.

Im Internet werden viele Programme zur Erzeugung von Zufallszahlen angeboten. Als Beispiel kann man das Programm <https://www.smart->

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

`rechner.de/zahlgenerator/rechner.php` verwenden. Dort wird eine Funktion `Math.random()` verwendet, die in der Programmiersprache php vorhanden ist. Beim Lotto „6 aus 49“ benötigt man bei jedem Tip sechs zufällige Zahlen und eine Zusatzzahl. Man gibt die Zahlen 1 und 49 als Grenzen des Bereiches ein. Jeder Click erzeugt dann eine Zufallszahl in diesem Bereich. Man muss die Ziehung natürlich wiederholen, falls ein Wert zweimal auftritt. Leider erreicht man mit dem System keine Garantie für einen Gewinn!

- Es gibt noch einige weitere Funktionen, die hier noch vorgestellt werden sollen. Der harmonischen Mittelwert wird für die Werte $(x_1, \dots, x_n)$ wie folgt berechnet:

$$\bar{x}_{\text{harm}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \quad (3.20)$$

Beispiel 3.6 *Angenommen wir haben 5 Tankstellen zur Verfügung, die 1 l Super für 1,26 €, 1,28 €, 1,30 €, 1,24 € und 1,21 € verkaufen. Man tankt an jeder Tankstelle für 20 €. Wieviel bezahlt man im Durchschnitt?*

Die Menge, die man an jeder Tankstelle und dann insgesamt erhält, ist gegeben durch

$$\frac{20}{1,26} + \frac{20}{1,28} + \frac{20}{1,30} + \frac{20}{1,24} + \frac{20}{1,21}.$$

Insgesamt hat man $5 \cdot 20$ € aufgewendet. Das Verhältnis dieser beiden Werte ergibt

$$\frac{5 \cdot 20}{\frac{20}{1,26} + \frac{20}{1,28} + \frac{20}{1,30} + \frac{20}{1,24} + \frac{20}{1,21}}.$$

Durch Ausklammern der 20 und durch Kürzen erhält man das harmonische Mittel der fünf Preise:

$$\frac{5}{\frac{1}{1,26} + \frac{1}{1,28} + \frac{1}{1,30} + \frac{1}{1,24} + \frac{1}{1,21}} = 1,2572.$$

Es ist charakteristisch, dass man immer den gleichen Betrag von 20 € aufwendet. Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist also gleich dem arithmetischen Mittel der Kehrwerte der Merkmalsbeträge.

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

In ähnlicher Weise könnte man eine Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen, wenn man immer die gleiche Strecke mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durchfährt.

- Die Berechnung des quadratischen Mittelwertes ist für eine gegebene Menge von Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ wie folgt definiert:

$$\text{QMW}_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (3.21)$$

Hier können unter den x_i wiederum negative Werte auftreten, betragsmäßig größere Werte haben einen stärkeren Einfluss auf das Ergebnis.

- Es bleiben noch zwei Funktionen übrig, mit denen man den Zusammenhang zwischen zwei Datenmengen beschreiben kann. Es seien zwei Mengen

$$\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{und} \quad \{y_1, \dots, y_n\}$$

gegeben. Zunächst berechnet man die beiden Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Danach berechnet man die Abweichungen der einzelnen Werte von diesen Mittelwerten und multipliziert sie miteinander:

$$\text{cov}(\{x\}, \{y\}) = s_{xy}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (3.22)$$

Sind die Werte von $x_i - \bar{x}$ und $y_i - \bar{y}$ beide positiv oder beide negativ, dann vergrößert sich die Kovarianz, haben sie unterschiedliche Vorzeichen, dann verringert sich ihr Wert. Man kann grob einschätzen, dass die Werte beider Datenmengen *in gleicher Weise linear ansteigen*, falls die Kovarianz positiv ist. Sie nehmen einen unterschiedlichen Verlauf, wenn die Kovarianz negativ ist.

Man kann also bei einer positiven Kovarianz schlussfolgern, dass wachsende x -Werte mit wachsenden y -Werten und fallende x -Werte mit fallenden y -Werten einhergehen. Ist die Kovarianz negativ, dann verhalten sich die x - und die y -Werte gegenläufig.

Unverzerrte Werte erhält man gemäß folgender Formel:

$$\text{cov}(\{x\}, \{y\}) = \tilde{s}_{xy}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})(y_i - \tilde{y}). \quad (3.23)$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- Eine letzte wichtige Größe soll hier angeführt werden, die *Korrelation* zwischen zwei Wertemengen. Man untersucht hier, ob man aus den Daten der ersten Menge Rückschlüsse ziehen kann auf die Daten der zweiten Datenmenge, und zwar sucht man nach einem *linearen Zusammenhang*. Dazu verwendet man die folgende Gleichung:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}^2}{s_x \cdot s_y}. \quad (3.24)$$

Schreibt man sie voll aus, dann erhält man

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (3.25)$$

Hier ist es auch gleichgültig, ob man diese Version verwendet oder die Division durch $n - 1$ zur Korrektur benutzt. Man kann in Gleichung (3.25) $\sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ anwenden und danach kürzen, und das Gleiche kann man natürlich auch mit $n - 1$ tun.

Die beiden Datenlisten müssen die gleiche Länge haben. Die erste Liste enthält eine Folge von x -Werten, die zweite Liste die zugehörigen y -Werte. Der Korrelationswert liegt immer zwischen -1 und +1:

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1. \quad (3.26)$$

Die Interpretation von Korrelationswerten ist im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Wir verwenden hier nur eine ganz einfache Deutung: liegt der Koeffizient *in der Nähe von* -1 , dann ähnelt die Verteilung der Werte der Funktion $y = -x$; liegt er *in der Nähe von* $+1$, dann ähnelt die Verteilung der Werte der Funktion $y = x$ (siehe Abbildung 3.4); hat er den Wert 0 oder unterscheidet sich wenig von 0, dann sind die Werte *unkorreliert*. Keinesfalls darf man kausale Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Wertemengen *einschmuggeln*.

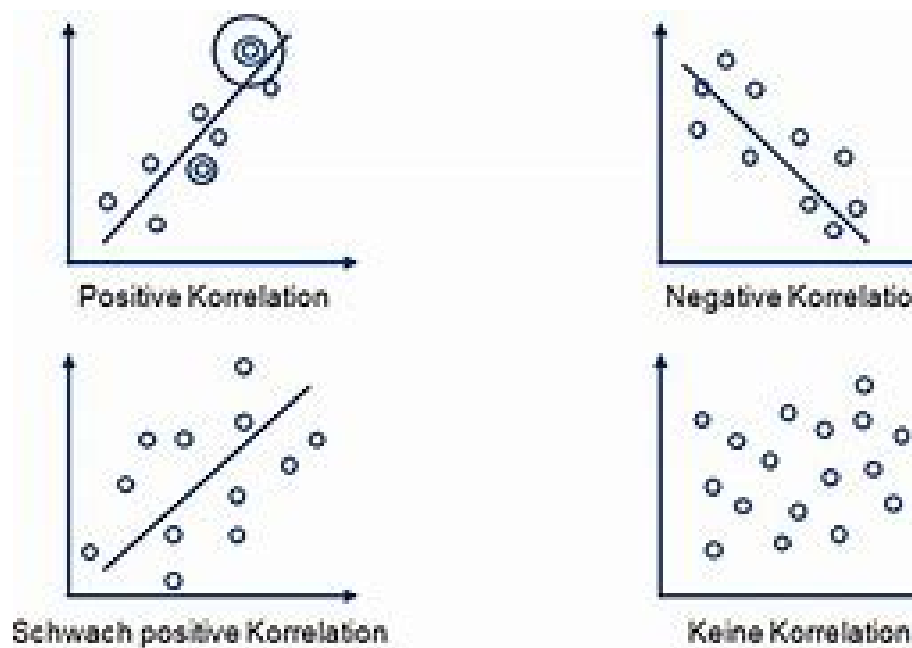


Abbildung 3.4: Verschiedene Korrelationen

3.5 Aufgaben

Die Aufgaben können in diesem Abschnitt eigentlich nur darin bestehen, dass man gewisse Datenmengen eingibt und dann entsprechende Koeffizienten und Werte berechnet und diese eventuell interpretiert. Für größere Datenmengen oder für den Alltagsbetrieb ist das aber eine ziemlich lästige Aufgabe. Es ist in solch einem Fall am besten, zusammen mit einem „Fachmann“ eine geeignete Datenverwaltung (Erfassung, Speicherung, Auswertung u.a.) zu entwerfen und einzuführen. Man denke etwa an ein System wie *Excel*, das hierfür reichhaltige Möglichkeiten bietet, oder ähnliche Programme, die man im Internet findet. Das liegt aber jenseits der eigentlichen mathematischen Konzepte. Die folgende Aufgabe soll diese Probleme andeuten.

Aufgabe 3.1 *Gegeben seien zwei Datenreihen X und Y . Man berechne alle vorhandenen statistischen Werte und finde eine Interpretation der Ergebnisse.*

<i>Jahr</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Jahr</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Jahr</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Jahr</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
1997	1	0	2002	1	0	2007	8	0	2012	5	0
1998	2	0	2003	2	0	2008	5	0	2013	6	0
1999	7	1	2004	2	0	2009	3	0	2014	3	3
2000	2	0	2005	3	0	2010	5	0	2015	5	0
2001	1	0	2006	2	0	2011	3	0	2016	8	1

Aufgabe 3.2 Sehr oft trifft man auf das Problem, dass aus einem Bestand Waren entnommen und weggebracht werden. Diese Situation bezeichnet man als Nehmen ohne Zurücklegen. Hier gibt es viele praktische Anwendungen: in einem Supermarkt möchte die Leitung gern wissen, welchen Waren am schnellsten verkauft werden, wann sie wieder bestellt werden müssen, wieviel Rabatt man gewähren kann usw. Zeige für drei schwarze und drei weiße Kugeln, wie sich der Ereignisraum verändert. Begründe die geänderten Wahrscheinlichkeiten!

Aufgabe 3.3 Bestimme den Ereignisraum für das Lotto „6 aus 49“

1. für die Ziehung der Zahlen ohne die Zusatzzahl,
2. für die Ziehung der Zahlen mit Zusatzzahl,

3.6 Lösungen

Lösung 3.1 Man gibt zuerst die Werte von X und von Y als Liste ein:

$$x := \{1, 2, 7, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 8, 5, 3, 5, 3, 5, 6, 3, 5, 8\} ,$$

$$y := \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 1\} .$$

Dann ergibt sich der Reihe nach

$$\begin{aligned} \min(x) &= 1 , & \max(x) &= 8 , \\ \min(y) &= 0 , & \max(y) &= 3 . \end{aligned}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Als nächstes berechnet man die Mittelwerte und erhält

$$\bar{x} = 3.7, \quad \bar{y} = 0.25.$$

Die Werte der beiden Listen kann man in Zusammenhang bringen mit Hilfe der Kovarianz: man erhält den Wert 0.275.

Dass die beiden Datenreihen im wesentlichen nichts weiter „miteinander zu tun haben“, sieht man am Korrelationskoeffizienten, dessen Wert 0.1777 in der Nähe von 0 liegt.

Lösung 3.2 Wir stellen in einem Graphen dar, welche Situation wir nach jeweils einem Zug vorfinden. Der linke Zweig stellt immer das Ziehen einer weißen, der rechte Zweig das Ziehen einer schwarzen Kugel dar.

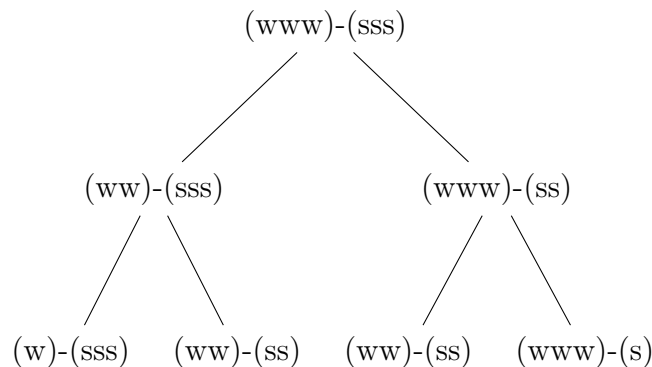


Abbildung 3.5: Ziehen ohne Zurücklegen

Lösung 3.3 Bei der Ziehung der eigentlichen Lottozahlen handelt es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen. Die erste Zahl wird mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{49}$ gezogen. Für die nächsten Zahlen wird der Nenner jeweils um den Wert 1 kleiner, da sich die Zahl der Kugeln jedesmal um 1 verringert. Also besteht der Ereignisraum stets aus 6 verschiedenen Zahlen, die zwischen 1 und 49 liegen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Ereignis liegt bei

$$p(E) = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{1}{44} = 0,000.000.000.099.321.2.$$

Da die Ziehungen voneinander unabhängig sind, kann man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten einfach miteinander multiplizieren.

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Für das Ziehen der Zusatzzahl werden die 6 gezogenen Zahlen wieder zurückgelegt. Die Zusatzzahl kann also durchaus eine der bereits gezogenen Zahlen sein. Für das Ereignis „6 Richtige mit Zusatzzahl“ muss man also $p(E)$ noch mit $\frac{1}{49}$ multiplizieren und erhält

$$p(Z) = \frac{p(E)}{49} = 0,000000000020269633.$$

Die Devise „Viel hilft viel“ gilt hier also nicht.

4 Differentialrechnung

4.1 Zahlenfolgen, unendliche Reihen und Produkte

Als Argumente einer Zahlenfolge verwenden wir die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$, die Werte, die diesen Argumenten zugeordnet werden, bilden eine *Zahlenfolge*.

Beispiel 4.1 Für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$a_n = n^2 : \quad 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

eine Folge, die fortlaufend die Quadratzahlen aufzählt.

Hier kann man also die Elemente der Folge aus ihren Argumenten (ihrem Index) berechnen.

Um das beizubehalten, beginnt man gelegentlich die Nummerierung der Elemente auch mit dem Wert 1:

Beispiel 4.2 Für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist

$$a_n = \frac{1}{n} : \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Dass dieses Problem nicht wichtig ist, sieht man an einer einfachen Umrechnung.

Beispiel 4.3 Für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ist

$$a_n = \frac{1}{n+1} : \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Man erhält damit genau die gleiche Zahlenfolge.

4 Differentialrechnung

Eine kulturell und historisch sehr interessante und bedeutsame Zahlenfolge ist die sogenannte *Fibonacci* - Zahlenfolge.

Beispiel 4.4 Bei dieser Folge kann man neue Elemente der Folge berechnen, wenn man schon vorherige Elemente kennt. Es handelt sich um eine rekursive Definition. Wir beginnen mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und berechnen das nächste Element immer als Summe der beiden vorhergehenden Elemente:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (4.1)$$

für $n \geq 2$. Explizit aufgeschrieben erhält man also die Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

(Ohne Probleme kann man wieder 0 und 1 als die beiden ersten Elemente verwenden.) Dividiert man zwei aufeinanderfolgende Elemente $\frac{a_{i+1}}{a_i}$, so erhält man eine neue Zahlenfolge, die sich dem „Goldenen Schnitt“ annähert:

$$1, 2, 1.5, 1.67, 1.6, 1.63, \dots$$

Ein vierstelliger Näherungswert für den „Goldenen Schnitt“ ist 1,6180. Teilt man nämlich eine Strecke der Länge 1 entsprechend den Regeln des Goldenen Schnittes, so ist der Wert der kürzeren Strecke gleich 0,382, der Wert der längeren Strecke gleich 0,618, und der Quotient der beiden Werte ist gleich 1,6180.

Die Fibonacci-Folge ist auch ein schönes Beispiel für eine alternierende Folge: einmal ist ein Wert der Folge kleiner als der nachfolgende Wert, das nächste Mal ist er größer. Hier springen die Werte der Folge um den Wert 1,6180 und nähern sich diesem Wert immer mehr an.

Beispiel 4.5 Eine nächste interessante Zahlenfolge ist die Folge der Primzahlen p , die durch keine Zahl q mit $1 < q < p$ teilbar sind. Hier gibt es überhaupt keine Berechnungsvorschrift, diese Folge kann man nur aufzählen:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$

Um neue Primzahlen zu finden, ist man vollständig auf Computerprogramme angewiesen; hier trifft man auf ein Problem, das man in zunehmendem Maße in der Diskreten Mathematik beim Einsatz von Programmen antrifft; man

4 Differentialrechnung

kann das Ergebnis nicht mehr „mit menschlichen Mitteln“ überprüfen und ist vollständig von korrekten Algorithmen, Programmen und Computern abhängig. Die zu Primzahlen existierende Theorie ist unüberschaubar und erfordert zu ihrem Verständnis ein umfangreiches Studium zahlentheoretischer Probleme.

Gelegentlich kann man Zahlenfolgen unterschiedliche Konzepten zuordnen.

1. Bei alternierenden Folgen wechselt das Vorzeichen von Element zu Element; das kann man durch a_0 und $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n$ ausdrücken. Für a_n ist dabei eine beliebige Bildungsvorschrift möglich, beispielsweise schreibt man

$$a_i = (-1)^i \cdot 2^i$$

und erhält die Folge $1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$

2. Bei einer arithmetischen Folge wird von einem Element zum nächsten eine Konstante d addiert oder subtrahiert, beispielsweise schreibt man $a_1 = 7$ und $a_{i+1} = a_i + 7$. Damit erhält man alle Vielfachen von 7.
3. Gilt für alle Elemente der Folge stets $a_{i+1} = a_i \cdot q$, dann handelt es sich um eine geometrische Folge $a_i = a_0 \cdot q^i$.

Wie wichtig Folgen ganzer Zahlen sind, kann man sehr schön mit Hilfe von „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ sehen, die man im Internet unter (OEIS) findet und die 1964 von *N. J. A. Sloane* begründet wurde.

Wenden wir uns einer weiteren speziellen Folge zu:

$$a_n = \frac{1}{n^2} : \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots \quad (4.2)$$

Für $n = 1, 2, 3, \dots$ enthält der Nenner das Quadrat der jeweiligen Zahl n . Wenn n und damit erst recht n^2 immer größer werden, dann werden die Kehrwerte immer kleiner und nähern sich immer mehr der Zahl 0 an. Man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (4.3)$$

Das Zeichen $n \rightarrow \infty$ bedeutet einfach, dass der Wert von n immer größer wird. Analog dazu bedeutet $n \rightarrow -\infty$, dass n immer kleiner wird. Man sagt, dass die Folge gegen 0 *konvergiert*, es ist eine streng monoton fallende Folge, da

4 Differentialrechnung

jedes Element a_i größer als das nächste Element a_{i+1} ist. 0 ist der *Grenzwert* der gegebenen Folge.

Jetzt bilden wir aus der Folge der a_n eine neue Folge, die Folge der *Partialsummen*:

$$\begin{aligned}s_1 &= a_1 \\s_2 &= a_1 + a_2 \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\&\dots\end{aligned}$$

Das ist die Grundlage für den Begriff der unendlichen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (4.4)$$

Das bedeutet, dass wir den oberen Wert für die Addition immer weiter erhöhen, etwa $n = 50$, $n = 100$, $n = 1000$, $\dots$. Der Wert der Summe wird immer größer, da ja stets positive Werte addiert werden.

Trotzdem wächst die Summe nicht unbeschränkt. Überraschenderweise erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449. \quad (4.5)$$

Eine solche unendliche Reihe, die sich immer mehr an einen endlichen Wert annähert, *konvergiert* gegen diesen Wert. Die Werte von $1/n^2$ werden immer kleiner und liefern letztendlich nur noch einen winzigen Beitrag.

Schauen wir uns eine zweite Reihe an, bei der das Vorzeichen von Zahl zu Zahl wechselt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots = -\frac{\pi^2}{12} \approx -0,8225$$

Beginnt man mit +1, dann erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi^2}{12} \approx 0,8225.$$

4 Differentialrechnung

Das Ergebnis wird stark durch den ersten Wert ± 1 beeinflusst. Die weiteren Elemente der Reihe werden so schnell klein, dass sich das Ergebnis nicht weit von ± 1 entfernt.

Erhöht man den Exponenten von n im Nenner, dann erhält man immer wieder konvergente Zahlenfolgen, da ja die Werte von $1/n^3$, $1/n^4$ immer schneller kleiner werden als die von $1/n^2$. Wie sieht es aus, wenn man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

berechnen will? Verwendet man einen Online-Rechner und lässt den Wert von n immer größer werden, sodass man vermuten kann, dass diese Reihe nicht konvergiert. Schlägt man im Internet unter dem Begriff „*harmonische Reihe*“ nach, dann wird diese Vermutung bestätigt. Die Elemente der Reihe werden zwar auch immer kleiner, aber nicht schnell genug. Das bedeutet, dass die Partialsummen immer größer werden und über jede Grenze hinauswachsen.

Wir wollen uns einige Eigenschaften dieser *harmonischen Reihe* anschauen.

Zunächst schauen wir uns die Partialsummen dieser Reihe an:

$$\begin{array}{rclcl} s_1 & = & 1 & = & 1,00 \\ s_2 & = & 3/2 & = & 1,50 \\ s_3 & = & 11/6 & \approx & 1,83 \\ s_4 & = & 25/12 & \approx & 2,08 \\ s_5 & = & 137/60 & \approx & 2,28 \\ & & \vdots & & \\ s_{20} & = & \dots & \approx & 3,60 \\ s_{50} & = & \dots & \approx & 4,50 \\ s_{100} & = & \dots & \approx & 5,19 \end{array}$$

Die Werte der Partialsummen werden naturgemäß größer, da ja ständig positive Zahlen addiert werden, wo sich die Werte aber hinbewegen, kann man kaum sehen. Die Folge könnte konvergieren, also ständig unter einem Wert bleiben und sich diesem annähern, das ist aber nicht der Fall. Diese Folge divergiert. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \quad (4.6)$$

4 Differentialrechnung

Der Beweis bringt die Potenzen von 2 ins Spiel. Wir schreiben die Folge noch einmal auf:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \\ & + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \right) + \dots \end{aligned}$$

Wir fassen, beginnend bei den zwei Elementen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$; die Anzahl von Elementen ist gleich 2..

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

Die Ungleichung folgt daraus, dass für $n < m$ immer $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ gilt.

Der nächste Abschnitt umfasst die *vier* Elemente von $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{8}$:

$$\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} .$$

Da die Reihe unendlich ist, kann man sich „beliebig viele Abschnitte“ verschaffen, die stets $> \frac{1}{2}$ sind. Der nächste Abschnitt würde von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{16}$ reichen usw.

Der Beweis für die Divergenz dieser harmonischen Reihe wird oft *Jakob Bernoulli (1689)* zugeschrieben, er ist aber offensichtlich schon bei dem französischen Universalgelehrten *Nicole Oresme (1323 - 1382)* zu finden.

Die Partialsummen $s_n = 1 + \dots + 1/n$ werden als *harmonische Zahlen* bezeichnet, da die Zahl, die zwischen zwei anderen Zahlen liegt, gerade das harmonische Mittel der beiden Nachbarn ist:

$$\bar{x}_{\text{harm}} = \frac{2}{1/\frac{1}{(n-1)} + 1/\frac{1}{(n+1)}} = \frac{2}{(n-1) + (n+1)} = \frac{1}{n} .$$

Beispiel 4.6 Eine weitere wichtige Reihe mit vielen Anwendungen in der Finanzmathematik ist die geometrische Reihe. Sie ist durch die folgende Summe definiert:

$$\bar{x}_{geom} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{n}.$$

Das Ergebnis hängt natürlich von q ab. Für $q = 1$ sind alle Werte $q^0, q^1, q^2, q^3, \dots$ immer gleich 1, die Werte der Partialsummen sind immer gleich $k+1$ und werden mit wachsendem k immer größer, die Zahlenfolge und die zugehörige Reihe divergieren. Natürlich divergiert die Folge der Partialsummen und damit die Reihe auch für $q > 1$.

Für die (endlichen) Partialsummen erhält man

$$\sum_{n=0}^k q^n = (q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^k) \cdot \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{k+1} - 1}{q-1}. \quad (4.7)$$

Wählt man einen Wert $q < 1$, so konvergiert q^{k+1} gegen 0, damit erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \quad (4.8)$$

Viele mathematische Funktionen werden durch unendliche Reihen dargestellt, die man vor allem zu numerischen Zwecken verwendet. Hier seien noch einige wichtige Beispiele angegeben.

- Reihenentwicklung der Funktion e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.9)$$

- Diese Entwicklung gilt auch für komplexe Zahlen z :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.10)$$

- Für die Umkehrung, den natürlichen Logarithmus, gibt es eine Reihenentwicklung für $0 < x \leq 2$:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad (4.11)$$

4 Differentialrechnung

Man sieht an diesen letzten Formeln, dass man hier zwei Argumente vorfindet, einmal den *Laufindex* n , und zum anderen die Variable x , für die der Funktionswert berechnet werden soll. Durch geeignete Wahl des Wertes von n kann man die Funktionswerte mit *beliebiger Genauigkeit* berechnen:

$$\ln(x) \approx \sum_{n=1}^{n_0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots \quad (4.12)$$

Zwei weitere Reihenentwicklungen sollen diese Möglichkeiten veranschaulichen.

- Die Reihe für $\sin(x)$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (4.13)$$

- Die Reihe für $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (4.14)$$

Hier haben wir die Festlegung $0! = 1$ eingeschmuggelt und verwendet.

Mit Hilfe solcher Reihenentwicklungen kann man auch einfach weitere Eigenschaften feststellen:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad (4.15)$$

ergeben sich ganz einfach auf Grund der geradzahligen bzw. ungeradzahligen Exponenten.

Schauen wir uns nun endliche und unendliche Produkte an.

$$\begin{aligned} p_5 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} . \end{aligned}$$

Hier sehen wir wieder eine Erscheinung, die bei unendlichen Folgen, Reihen und Produkten auftreten kann. Wir beginnen mit einem Anfangswert $1/2$ und

4 Differentialrechnung

multiplizieren diesen Wert fortlaufend mit einer Zahl, die stets kleiner als 1 ist. Damit wird der bis dahin vorhandene Wert *verringert*, er wird immer kleiner.

Schaut man sich die Werte für größere n an, dann konvergiert die Folge der *Partialprodukte* offensichtlich gegen 0, obwohl die hinzukommenden Faktoren immer näher bei 1 liegen.

Ansonsten ist der Mechanismus für unendliche Produkte der gleiche wie der Mechanismus für unendliche Reihen: man bildet aus den Produkten eine Folge von Zahlen und prüft, ob diese Folge konvergiert oder divergiert. Bei unendlichen Produkten muss man zusätzlich noch die Zahl 0 beachten, die entweder als Faktor oder als Grenzwert einer Teilfolge auftreten kann. Schauen wir uns dazu noch drei interessante Beispiele an.

Beispiel 4.7 *Wir untersuchen zunächst:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.16)$$

Die Folge der Faktoren $\frac{4k^2}{4k^2-1}$ beginnt bei $\frac{4}{3}$, die Faktoren werden immer kleiner, bleiben aber größer als 1. Es handelt sich also um eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge. Sie konvergiert gegen 1. Außerdem gilt, dass $\pi/2 = 1,5708$ ist. Der Anfangswert 1,3333 wird also durch das Produkt mit dem nächsten Faktor etwas erhöht, die Werte wachsen monoton an, sind aber nach oben beschränkt und konvergieren gegen $\frac{\pi}{2} = 1,5708$.

Auch für die trigonometrischen Funktionen gibt es derartige Produktdarstellungen.

Beispiel 4.8

Es gilt:

$$\sin(x) = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \quad (4.17)$$

und

$$\cos(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right) \quad (4.18)$$

4 Differentialrechnung

wobei der Wert von x zwischen 0 und 2π (im Bogenmaß) angegeben werden muss.

Das Verhalten dieser Produkte macht man sich ebenso klar wie bei den vorhergehenden Beispielen.

Man wird selten in die Verlegenheit kommen, diese Reihen oder Produkte tatsächlich für numerische Zwecke zu verwenden, da ja die trigonometrischen selbst schon mit hinreichender Genauigkeit auf Taschenrechnern abrufbar sind.

4.2 Grenzwerte

Dieser Begriff ist die Grundlage für die gesamte Differential- und Integralrechnung. Wir zeigen eine einfache Einführung und werden notwendige Erweiterungen bei den Beispielen und Anwendungen vornehmen. Wir wählen die Funktion $y = x^2 - 4x + 5$ als Beispiel und wollen herausfinden, welchem Wert von y sich die Funktion nähert, wenn sich x dem Wert 2 nähert.

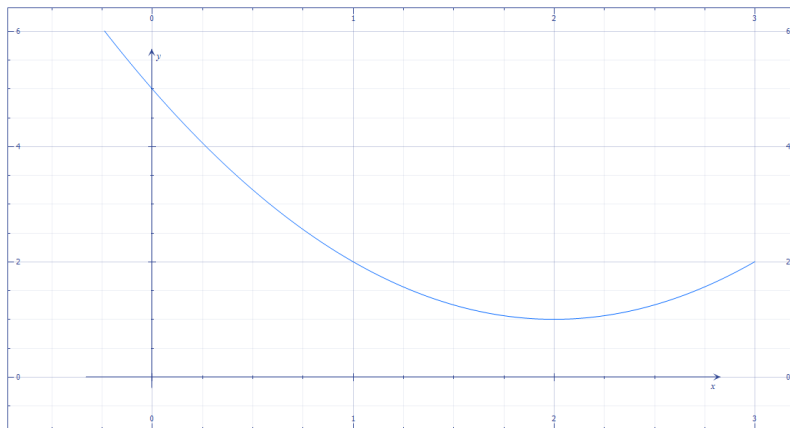


Abbildung 4.1: Ein einfaches Grenzwertverhalten

Will man das Problem ganz ausführlich untersuchen, so wählt man die Folge $(2 + \frac{1}{n})$ und berechnet für jeden Wert dieser Folge den entsprechenden Wert

4 Differentialrechnung

von $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

$$\begin{aligned} f\left(2 + \frac{1}{n}\right) &= \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 5 \\ &= 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - 8 - \frac{4}{n} + 5 \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} . \end{aligned}$$

Die Werte der Folge für f werden ständig kleiner und nähern sich immer mehr der 1, und zwar von rechts.

Will man eine Annäherung von links untersuchen, so wählt man die Folge $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. Jetzt ist

$$f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} ,$$

und damit ergibt sich für eine Annäherung von links der gleiche Grenzwert $f(2) = 1$.

Abbildung 4.1 widerspiegelt dieses Verhalten. Es liegt also folgende Situation vor:

- Das Argument strebt einem endlichen Wert zu, der Grenzwert ist ebenfalls endlich.

Als nächstes betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2} .$$

Abbildung 4.2 zeigt, dass die Funktion symmetrisch zu $x = 0$ ist, da $x^2 = (-x)^2$ ist. Das ist ein wichtiger Hinweis:

- Wenn man die Grenzwerte einer Funktion untersucht, sollte man immer mit einem Bild dieser Funktion beginnen.

Hier ist das Bild einfach zu verstehen. Je kleiner der Wert von $|x|$ ist, d.h. je näher x bei 0 liegt, desto größer ist der Wert von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$. In diesem Fall schreibt man:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty .$$

4 Differentialrechnung

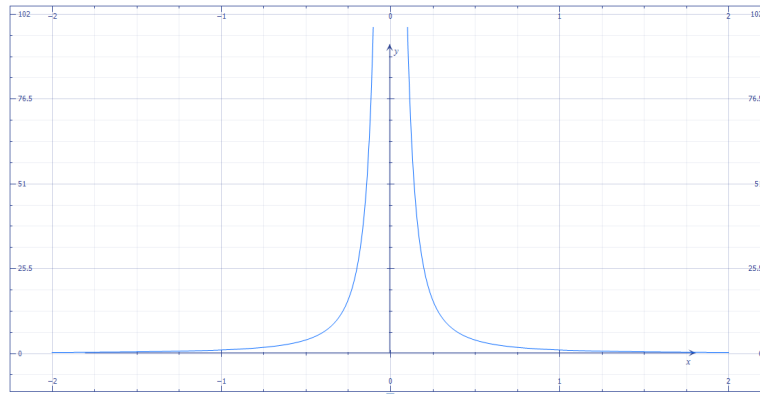


Abbildung 4.2: Unendliche Grenzwerte: Polstellen

Hier hat man ein endliches Argument, aber einen unendlichen Grenzwert (Polstelle).

Will man die „Bewegungsrichtung“ betonen, so schreibt man gelegentlich

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

für eine Annäherung von rechts und

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

für eine Annäherung von links.

Abbildung 4.2 zeigt noch eine andere Eigenschaft unserer Funktion. Man kann den Grenzwert auch bestimmen, wenn das Argument gegen ∞ strebt. Bei unserer Beispielfunktion ist das wiederum nicht schwierig. Werden x und damit auch x^2 immer größer, wird $\frac{1}{x^2}$ immer kleiner, ist aber immer positiv. Das gilt sowohl für positive als auch für negative x -Werte. Jede beliebige Schranke S wird dabei unterschritten:

$$\frac{1}{x^2} < S$$

wird auf der positiven Seite für $x > \sqrt{\frac{1}{S}}$, auf der negativen Seite für $x < -\sqrt{\frac{1}{S}}$ erfüllt. In einem solchen Fall schreibt man für negative x

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ,$$

4 Differentialrechnung

und genauso für positive x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 .$$

Das ist der Fall eines unendlichen Argumentes, wobei der erreichte Grenzwert aber endlich ist.

Beispiel 4.9 Es sei $y = \frac{x^2+x+1}{x}$. Dann kann man die Division durchführen und erhält

$$y = x + 1 + \frac{1}{x} .$$

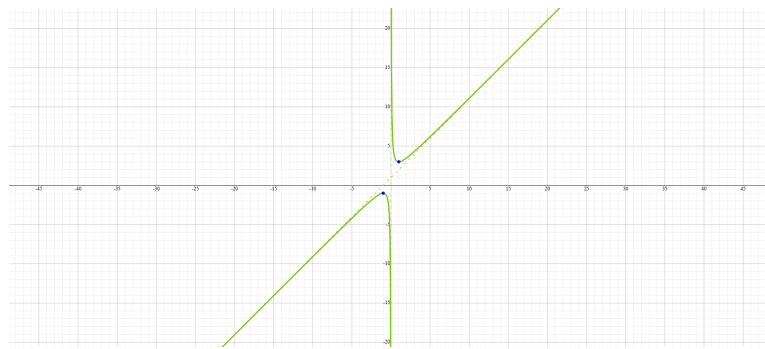


Abbildung 4.3: Das Auftreten von Asymptoten

Der Bruch $\frac{1}{x}$ wird immer kleiner, wenn $x \rightarrow +\infty$ strebt, das gleiche gilt für $x \rightarrow -\infty$. Der Einfluss dieses Bruches wird immer geringer, Das Verhalten wird immer mehr durch die Gerade $y = x + 1$ bestimmt. Das Bild der Funktion nähert sich immer mehr an diese Gerade an, es handelt sich um eine Asymptote.

Abb. 4.3 wurde mit dem Programm <https://de.symbolab.com/graphing-calculator> gezeichnet.

Mit Hilfe des Grenzwertes definiert man den Begriff der *Stetigkeit* einer Funktion.

Definition 4.1 Eine Funktion $f(x)$ ist in einem Punkt x_0 stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \tag{4.19}$$

ist.

Das Argument strebt einem endlichen Wert zu, der Grenzwert ist ebenfalls endlich und stimmt mit dem Funktionswert überein. Die meisten Funktionen, mit denen man üblicherweise zu tun hat, sind stetig. Man kann sich oft daran orientieren, dass eine geschlossene Kurve (ohne Sprünge, Lücken oder Polstellen) existiert. Die Definition der Stetigkeit geht zwar von einem Punkt aus, kann aber von daher auf die Stetigkeit in einem Intervall oder für die gesamte Funktion erweitert werden.

4.3 Einfache Ableitungen

Mit Hilfe des Konzeptes von Grenzwerten definiert man Ableitungen einer Funktion. Dieser Begriff ist untrennbar mit dem Namen zweier berühmter Mathematiker und Physiker verbunden. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) und Isaac Newton (1643 - 1727) untersuchten unterschiedliche Probleme, lösten sie aber letztendlich mit den gleichen Mitteln. Es gibt viele interessante Hinweise auf Vorgänger und insbesondere auf den Prioritätsstreit, da beide Wissenschaftler die Urheberschaft für sich beanspruchten. Heute geht die Wissenschaftswelt davon aus, dass beide die Begriffe unabhängig voneinander gefunden haben, zumal ja auch unterschiedliche Probleme gelöst wurden.

Eines dieser Probleme ist das *Tangentenproblem*, das von Leibniz untersucht wurde. Die Aufgabe besteht darin, für eine gegebene Funktion $y = f(x)$ die Gleichung der Tangente an die Funktion in einem Punkt x_0 zu bestimmen. Da es sich bei einer Tangente naturgemäß um eine Gerade handelt, hat die allgemeine Gleichung die Form

$$y = mx + n. \quad (4.20)$$

Bereits früher hatten wir bei linearen Funktionen festgestellt, dass der Wert von m den Anstieg der Geraden bestimmt. In Abbildung 4.4 besitzt die obere (blaue) Gerade den Anstieg

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Sie schneidet die Kurve in den beiden Punkten $P_1 = (0, -1)$ und $P_2 = (2, 3)$ und kann für die Kurve als *Sekante* angesehen werden. Für die zweite Gerade

4 Differentialrechnung

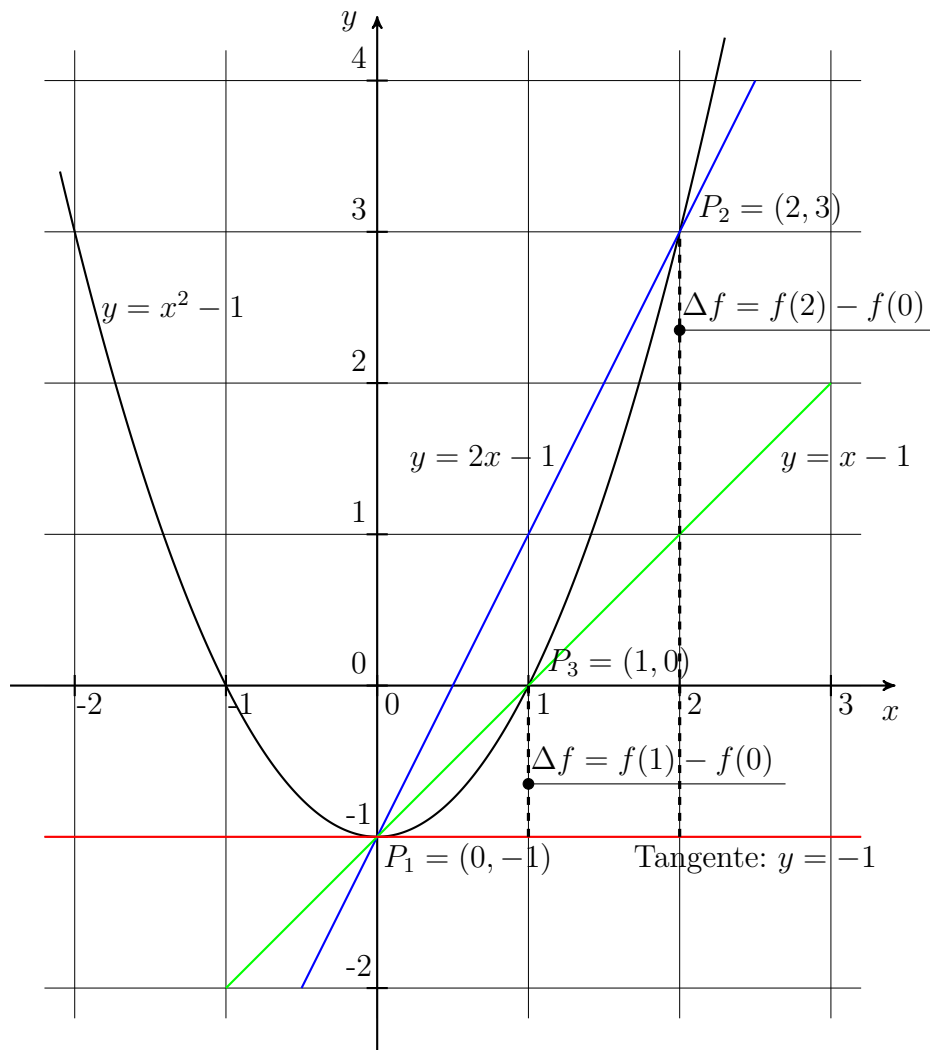


Abbildung 4.4: Sekanten für die Funktion $f(x) = x^2 - 1$

berechnet man aus den Punkten $P_1 = (0, -1)$ und $P_3 = (1, 0)$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - (-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Man kann sich den Prozess so vorstellen, dass man eine Sekante durch den Punkt P_1 , für den man die Tangente sucht, und einen zweiten Punkt auf der Kurve der Funktion definiert und dann den zweiten Punkt in Richtung des Punktes P_1 bewegt, also den Grenzwert bildet. Existiert dieser Grenzwert, dann ist das der Anstieg der Tangente.

Für unsere Beispielfunktion geht das wie folgt vor sich:

$$\begin{aligned}\frac{(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} &= \frac{((x + \Delta x)^2 - 1) - (x^2 - 1)}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x .\end{aligned}$$

Geht jetzt Δx gegen 0, so bleibt $2x$ übrig. Die Funktion $y = x^2 - 1$ hat also für jedes x eine Tangente mit dem Anstieg $2x$. Speziell hat die Tangente im Nullpunkt den Anstieg 0. Das ist gleichzeitig ein Beispiel für einen *Extremwert*, in diesem Fall handelt es sich um ein *Minimum*. Ganz allgemein schreibt man:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x). \quad (4.21)$$

4.4 Die Momentangeschwindigkeit

Bei einer Bewegung (beispielsweise mit dem Auto) geht man von einem in einer bestimmten Zeiteinheit zurückgelegten Weg aus. Die Angabe „80 km pro Stunde“ bedeutet eine Differenz des zurückgelegten Weges in einer bestimmten Zeiteinheit. Man kann also für eine durchschnittliche Geschwindigkeit schreiben:

$$\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{80 \text{ km}}{60 \text{ min}} .$$

Man spricht von einer *gleichförmigen Bewegung*, wenn der Weg linear von der Zeit abhängt:

$$s(t) = v \cdot t . \quad (4.22)$$

Die Anwendung des *Differenzenquotienten* und die Grenzwert-Bildung zeigen das folgende Ergebnis:

$$\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{v \cdot (t + \Delta t) - v \cdot t}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = v .$$

Die Geschwindigkeit ist also die Ableitung des Weges nach der Zeit:

$$v = \frac{ds(t)}{dt} . \quad (4.23)$$

Analoge Betrachtungen, also die Suche nach einer Ableitung, kann man für sehr viele Funktionen anstellen.

4 Differentialrechnung

Wir wollen an Beispielen zeigen, wie man Lösungen für die Ableitungen findet und wie schwierig, aber auch elegant das sein kann.

Beispiel 4.10 *Ein trivialer Grenzfall ist die Ableitung einer Konstanten c . Hier ist*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 ,$$

also

$$\frac{dc}{dx} = 0 . \quad (4.24)$$

Beispiel 4.11 *Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$.*

Der Differenzenquotient hat hier die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^n}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{(x^n + n \cdot x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{(n \cdot x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n)}{\Delta x} \\ &= n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} . \end{aligned}$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ bleibt nur $n \cdot x^{n-1}$ übrig, und es gilt:

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1} . \quad (4.25)$$

Beispiel 4.12 *Ableitung der Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$.*

Wir beginnen wieder mit dem Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} . \quad (4.26)$$

Um die Wurzelfunktion zu beseitigen, erinnern wir uns an das dritte binomische Gesetz:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

und ergänzen den Differenzenquotient in folgender Weise:

$$\frac{\Delta\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sqrt{x}}{\Delta x} &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ führt schließlich zu dem Ergebnis

$$\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}. \quad (4.27)$$

Es lässt sich also schlussfolgern, dass die Formel (4.25) auch für den rationalen Exponenten $\frac{1}{2}$ gültig ist.

Ausgehend von dieser Erkenntnis haben detailliertere weitere Untersuchungen zu dem Ergebnis geführt, dass die Formel (4.25) für jeden rationalen Exponenten $\frac{1}{n}$ ihre Gültigkeit behält.

4.5 Höhere Ableitungen

Das Ergebnis der Ableitung einer Funktion ist wieder eine Funktion, von der man erneut die Ableitung bilden kann. Man kommt so zu einer zweiten, dritten, ..., n -ten Ableitung. Das bedeutet, dass die Funktion f zweimal, dreimal, ... nach x abgeleitet werden soll.

Es gibt sehr viele Regeln, die in „klassischen“ Lehrbüchern einen breiten Raum einnehmen. Wenn man Programme verwendet, sind sie mit Sicherheit in das Programm eingearbeitet und müssen nicht explizit angewendet oder berücksichtigt werden. Als Beispiel wollen wir die sogenannte *Produktregel* verwenden.

Beispiel 4.13 *Es gilt:*

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} + u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx}. \quad (4.28)$$

4 Differentialrechnung

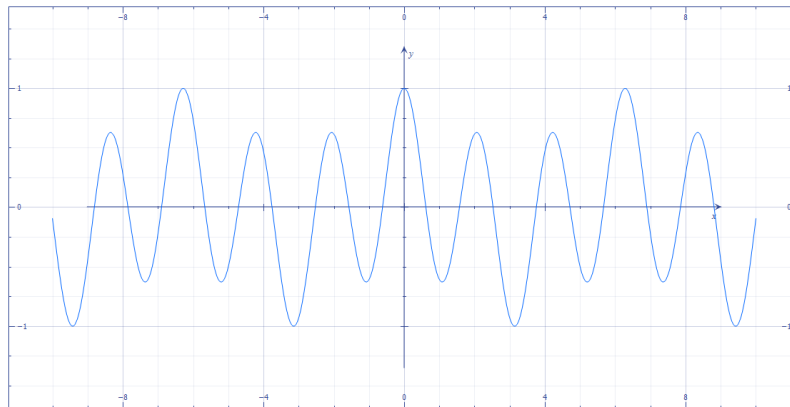


Abbildung 4.5: Darstellung der Funktion $y = -2 \sin^2(x) \cdot \cos(x) + \cos^3(x)$

Ein sehr leistungsfähiges Programm findet man unter <https://www.ableitungsrechner.net/>. Für die in Abb. 4.5 dargestellte Funktion findet das Programm die Lösung

$$2\sin^3(x) - 7\cos^2(x)\sin(x),$$

stellt die einzelnen Schritte dar und zeichnet das Ergebnis in ein Koordinatensystem (siehe Abb. ??).

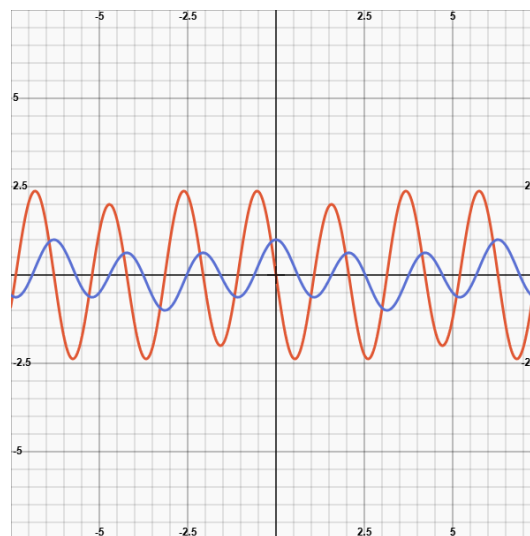


Abbildung 4.6: Die Ableitung der Funktion $y = -2 \sin^2(x) \cdot \cos(x) + \cos^3(x)$

Wenn wir uns daran erinnern, dass eine Nullstelle der Ableitung ein Maximum oder ein Minimum der Funktion kennzeichnet, so sieht man in der Abbildung

4 Differentialrechnung

4.5, dass es hier jede Menge Minima bzw. Maxima gibt, was natürlich an der Periodizität der trigonometrischen Funktionen liegt.

Eine Nullstelle der Ableitung tritt auch für einen horizontalen Wendepunkt auf wie zum Beispiel für die Funktion $y = x^3$ im Punkt $(x, y) = (0, 0)$.

Beispiel 4.14 Dieses Beispiel stellt die sogenannte Kettenregel dar. Hier zeigt sich die Eleganz des von Leibniz entwickelten Formalismus in ganz besonderer Weise. Es gilt nämlich

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \quad (4.29)$$

Zur Vereinfachung des Problems führt(e) man eine Hilfsfunktion $t = t(x)$ und eine Transformation $y = y(t)$ ein und zerlegt die Ableitung in zwei Schritte.

Als Beispiel nehmen wir die Funktion

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Man setzt

$$\begin{aligned} t &= 1 - x^2 \\ y &= \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\sqrt{t}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

und

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d(1 - x^2)}{dx} = -2x.$$

Fügt man beides zusammen, dann erhält man

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

An solchen Stellen erhebt sich immer wieder die Frage, ob man durch die Herleitung und Kenntnis der Regel etwas an besserem Verständnis gewinnt oder man sich mit einem allgemeinen Verständnis von Ableitungen und anschließender Berechnung durch ein solches System begnügen kann.

Beispiel 4.15 Als letzte Regel soll die Quotientenregel bewiesen werden:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad (4.30)$$

in der zur Vereinfachung die Schreibweise $u'(x) = \frac{du(x)}{dx}$ und $v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$ verwendet wird. Einfach und fasslich ist es, wenn man

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

umwandelt in

$$f(x) \cdot v(x) = u(x).$$

Die Anwendung der Produktregel (4.28)

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}$$

und die Auflösung der entstandenen Gleichung nach $f'(x)$

$$\begin{aligned} v(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot v'(x) &= u'(x) \\ v(x) \cdot f'(x) &= u'(x) - f(x) \cdot v'(x) \\ f'(x) &= \frac{u'(x) - f(x) \cdot v'(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)} \cdot v'(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

ergibt mit $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)$ dann die eingangs genannte Form.

Auch hier kannten die Systeme diese Regel und berücksichtigen sie ganz automatisch.

Damit kann man die Aufmerksamkeit wieder von den Rechnungen weg zur Interpretation und Anwendung der Ergebnisse verschieben.

Die Funktion $y(x) = e^x$ spielt eine besondere Rolle. Für sie gilt:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (4.31)$$

Sie besitzt in jedem Punkt x eine Tangente, und deren Anstieg ist gleich dem Funktionswert in diesem Punkt.

4.6 Aufgaben

4.7 Lösungen

5 Integralrechnung

5.1 Bestimmte Integrale

Die bestimmten Integrale benötigt man bei der Berechnung der Fläche unter einer Kurve. Zur Erläuterung des Vorgehens beziehen wir uns auf Abbildung 5.1.

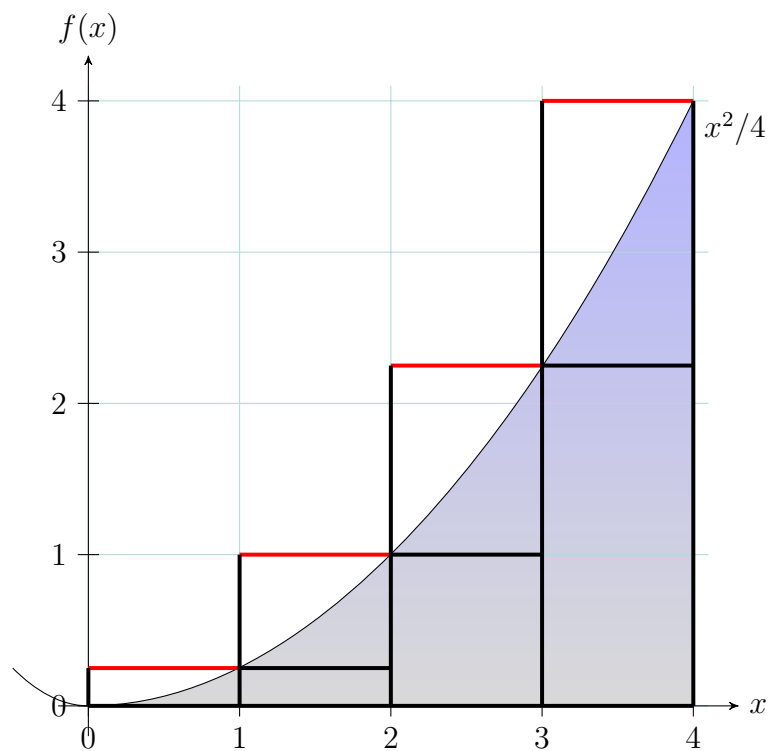


Abbildung 5.1: Fläche unter der Kurve $y = f(x) = \frac{x^2}{4}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$

5 Integralrechnung

- Wir wählen einen Wert $\Delta x = 1$ und unterteilen den Bereich von 0 bis 4 in Abschnitte dieser Länge. Man erhält $\frac{4}{\Delta x} = 4$ Intervalle.
- Man multipliziert $\Delta x = 1$ mit dem Funktionswert für den linken Rand jedes Intervalls, also

$$\Delta x \cdot f(0) , \quad \Delta x \cdot f(1) , \quad \Delta x \cdot f(2) , \quad \Delta x \cdot f(3) .$$

Diese Produkte stellen gerade die Flächeninhalte der Rechtecke dar, die unten durch die x -Achse begrenzt werden und deren Seitenlänge durch den Funktionswert bestimmt wird.

Im Beispiel entsteht

$$1 \cdot f(0) = 0 , \quad 1 \cdot f(1) = 0,25 , \quad 1 \cdot f(2) = 1 , \quad 1 \cdot f(3) = 2,25 .$$

Durch Addition dieser Werte erhalten wir $\mathcal{S}_u = 3,50$.

Als Formel kann man schreiben:

$$\mathcal{S}_u = \Delta x \cdot \sum_{n=0}^3 \frac{n^2}{4} = 3,5 . \quad (5.1)$$

Da die Werte der Funktion von links nach rechts zunehmen, bleibt man auf diese Weise „ein wenig“ unter dem Wert des Flächeninhaltes, es handelt sich hier um eine *Untersumme*.

- Auf die gleiche Weise verfahren wir mit der rechten Seite jedes Intervalls. Es ergibt sich

$$1 \cdot f(1) = 0,25 , \quad 1 \cdot f(2) = 1 , \quad 1 \cdot f(3) = 2,25 , \quad 1 \cdot f(4) = 4 .$$

Damit erhält man

$$\mathcal{S}_o = \Delta x \cdot \sum_{n=1}^4 \frac{n^2}{4} = 7,5 . \quad (5.2)$$

Diese Fläche wird durch die roten Linien angedeutet, ihr Wert liegt oberhalb des gewünschten Wertes. Man bezeichnet ihn deshalb als *Obersumme*. Es gilt also

$$3,5 \leq \mathcal{F} \leq 7,5 .$$

5 Integralrechnung

- Der nächste Schritt besteht in der Verfeinerung der Schritte auf der x -Achse. Als Beispiel sei $\Delta x = \frac{1}{2}$ gewählt. Hier entstehen acht Intervalle. Damit erhalten wir

$$\mathcal{S}_u = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^7 \frac{n^2}{16} = 4,375 . \quad (5.3)$$

und

$$\mathcal{S}_o = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^8 \frac{n^2}{16} = 6,375 . \quad (5.4)$$

Die Untersumme wird größer, die Obersumme wird kleiner, sie bewegen sich, wenn die Intervalle kleiner werden, offensichtlich auf einen Grenzwert zu, den gesuchten Flächeninhalt.

Eine weitere Verfeinerung unterstreicht dieses Verhalten; für $\Delta x = \frac{1}{1000}$ ergibt sich

$$\mathcal{S}_u = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{n=0}^{3999} \frac{n^2}{4 \cdot 1000^2} = 5,3313 \quad (5.5)$$

sowie

$$\mathcal{S}_o = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{n=1}^{4000} \frac{n^2}{4 \cdot 1000^2} = 5,3353 . \quad (5.6)$$

Hier liegen die Werte schon „dicht“ beieinander. Wir werden ein wenig später sehen, dass der wirkliche Wert $\mathcal{F} = \frac{16}{3} \approx 5,333\dots$ beträgt.

Das Programm <https://www.integralrechner.de/> bestätigt dieses Ergebnis.

Man kann diese Betrachtungen erweitern. Der linke Randpunkt des Intervalls muss ja nicht der Nullpunkt sein. Wir wählen beliebige Werte $0 < a < b$. Die Anzahl der Intervalle ist gleich $k = \frac{(b-a)}{\Delta x}$. Damit erhält man beispielsweise

$$\mathcal{S}_o = \Delta x \cdot \sum_{n=1}^k f(a + n \cdot \Delta x) . \quad (5.7)$$

Es war schon zu sehen, dass der Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ den Flächeninhalt berechenbar macht. Man schreibt für diese Kombination von Summation und

Grenzwertbildung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{S}_u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{S}_o = \int_a^b f(x) dx .$$

In diesem Beispiel wurde eine Funktion verwendet, die von links nach rechts anstieg. Damit lag das Minimum der Funktion immer im linken Grenzpunkt und das Maximum im rechten Grenzpunkt des Intervalls. Für stetige Funktion gibt es in jedem Intervall immer ein Minimum und ein Maximum, und wenn man diese Werte verwendet, ist die Vorgehensweise identisch mit dem gewählten Beispiel.

5.2 Unbestimmte Integrale

Wir betrachten jetzt eine variable obere Grenze und bezeichnen die Variable der Funktion mit t , um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Es steht also folgender Ausdruck zur Diskussion:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt . \quad (5.8)$$

Es handelt sich hier um den Flächeninhalt, der unten durch die x -Achse, oben die Funktion, links durch $t = a$ und rechts durch einen variablen Wert x begrenzt wird. Natürlich ist der Wert dieses Integrals für gegebenes a und gegebenes $f(t)$ von x abhängig, also eine Funktion von x . Der Flächeninhalt interessiert an dieser Stelle nicht, sondern nur die Ableitung dieser Funktion. Für sie gilt:

$$F'(x) = f(x_0). \quad (5.9)$$

Man nennt $F(x)$ das unbestimmte Integral oder eine Stammfunktion von $f(x)$. Es wird also die folgende Frage beantwortet:

Gibt es eine Funktion $g(x)$, so dass

$$\frac{dg(x)}{dx} = f(x)$$

für eine gegebene Funktion $f(x)$ gilt?

5 Integralrechnung

Ist das der Fall, dann nennt man diese Funktion $g(x)$ das (unbestimmte) Integral von $f(x)$ und schreibt

$$F(x) = g(x) = \int f(x)dx. \quad (5.10)$$

Als Spezialfall kehrt man zum Ausgangspunkt zurück und verwendet diese gefundene Funktion für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) . \quad (5.11)$$

Die zwei völlig unterschiedlichen Aufgabenstellungen - die Berechnung von Tangenten bzw. Geschwindigkeiten und die Berechnung von Flächeninhalten sind miteinander verwandt und ergänzen sich in bewundernswerter Art und Weise.

Die Integration - das Finden von Stammfunktionen - ist ein sehr umfangreiches Gebiet, man kann aber viele Ergebnisse durch Umkehrung der Ableitungsoperationen erhalten. Es galt beispielsweise

$$\frac{d x^2}{dx} = 2x .$$

Damit ergibt sich sofort

$$\int 2x dx = x^2 . \quad (5.12)$$

Hier sei noch daran erinnert, dass die Ableitung einer Konstanten gleich 0 ist, es gilt erweitert:

$$\int 2x dx = x^2 + C_1 . \quad (5.13)$$

Man kann also zu jeder Stammfunktion eine additive Konstante hinzufügen.

„Früher“ gab es dicke Bücher, die viele unterschiedliche Stammfunktionen aufzählten, und auch jetzt kann man im Internet viele Integraltafeln finden. Das Integrieren von unterschiedlichen Funktionen galt als eine schwierige Aufgabe, die jetzt häufig durch eine geschickte, von Kenntnissen gestützte Suche ersetzt wird (siehe, beispielsweise <https://www.integralrechner.de/> oder <https://de.symbolab.com/solver/integral-calculator>). Viel wichtiger ist es daher, die Ergebnisse, die man erhält, an seine eigenen Aufgabenstellungen anzupassen und richtig zu interpretieren.

5 Integralrechnung

Es ist für das Verständnis auch sehr hilfreich, dass unter dem Ergebnis meistens ein Link *Lösungsschritte* vorhanden ist, mit dem dann die Lösung schrittweise erläutert wird.

Es gibt für die Integralrechnung natürlich viele Details und Einzelheiten, mit denen man sich schrittweise vertraut machen muss. Einige Beispiele sollen das zeigen.

Beispiel 5.1 Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ wird von allen Punkten auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt $(0, 0)$ erfüllt. Will man den Flächeninhalt dieses Kreises berechnen, der gleich $\pi \cdot r^2 = \pi$ ist, so muss man die gegebene Gleichung in zwei Funktionen umwandeln:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= +\sqrt{1-x^2} \ , \\ y_2(x) &= -\sqrt{1-x^2} \ .\end{aligned}$$

Das Integral über $y_1(x)$ ergibt erwartungsgemäß $\frac{\pi}{2}$ für den oberen Halbkreis, für den unteren Halbkreis erhält man $-\frac{\pi}{2}$. Das ist auch verständlich, weil für die Summation nur negative Funktionswerte verwendet werden.

Der gesamte Flächeninhalt $\mathcal{F}$ ergibt sich folglich als

$$\mathcal{F} = \int_{-1}^1 y_1(x) dx + \left| \int_{-1}^1 y_2(x) dx \right| .$$

Man muss also beachten, dass bestimmte Integrale Flächeninhalte liefern, die mit einem Vorzeichen versehen sind.

Beispiel 5.2 Ebenso muss man die Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$ beachten. Betrachtet man die Funktion

$$\begin{aligned}y(x) &= (x-1)(x-3)(x+1) \\ &= x^3 - 3x^2 - x + 3 \ ,\end{aligned}$$

so gilt

$$\int_{-2}^4 (x-1)(x-3)(x+1) dx = 0 \ .$$

5 Integralrechnung

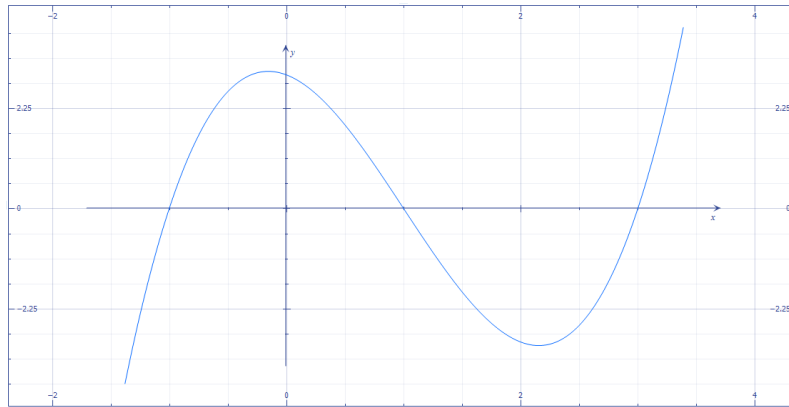


Abbildung 5.2: Die Funktion $y(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 1)$

Will man die Größe der Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse zwischen $x = -2$ und $x = 4$ bestimmen, dann muss man die Integration in Teilintegrale über die Teilstücke zwischen den Nullstellen zerlegen und für jedes Teilintegral den absoluten Betrag verwenden:

$$\mathcal{F} = \left| \int_{-2}^{-1} f(x) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^3 f(x) dx \right| + \left| \int_3^4 f(x) dx \right| .$$

Für den bekannten Verlauf der Funktionen aus der Abbildung 5.2 ergibt sich der positive Gesamtwert der Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse durch:

$$\mathcal{F} = - \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx .$$

Viele Regeln sind in die Programme eingebaut, einige sollen aber hier speziell erwähnt werden.

- Multiplikation mit einer Konstanten:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx. \quad (5.14)$$

- Integration von Summe und Differenz:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx . \quad (5.15)$$

- Partielle Integration:

$$\int f(x) \cdot g(x)' dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx . \quad (5.16)$$

Diese Regel folgt unmittelbar aus der Umkehrung der Produktregel (4.28) für Ableitungen.

5.3 Einige wichtige Anwendungen

Speziell für numerische Rechnungen kann man die sogenannten *Taylor-Reihen* verwenden. Unter bestimmten Bedingungen, die eine Funktion $f(x)$ erfüllen muss, gilt nämlich in der Umgebung eines Punktes x_0 auf der reellen Achse die folgende *Reihenentwicklung*:

$$\begin{aligned} f(x, x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Für $x_0 = 0$ bezeichnet man diese Reihenentwicklungen als MacLaurin-Reihe. Man erhält auf diese Weise die Reihen für e^x , $\sin(x)$ und $\cos(x)$, wie sie in (4.10), in (4.13) und in (4.14) angegeben sind. Für $\ln(x)$ muss man $x_0 = 1$ verwenden (siehe (4.11)).

Diese Reihenentwicklungen verwendet man hauptsächlich zur numerischen Berechnung von Funktionswerten, die „früher“ in dicken Tafelwerken niedergelegt wurden. Als Beispiel berechnen wir etwa $\sin(0,75)$. Ein Taschenrechner liefert für 6 Stellen den Wert

$$\sin(0.75) = 0.681639 .$$

Benutzt man die Darstellung durch eine Reihe, so ergibt sich

$$x - \frac{0.75^3}{3!} + \frac{0.75^5}{5!} = 0.681665 , \quad (5.18)$$

$$x - \frac{0.75^3}{3!} + \frac{0.75^5}{5!} - \frac{0.75^7}{7!} = 0.681639 . \quad (5.19)$$

5 Integralrechnung

Zur Sicherheit fügen wir noch ein weiteres Element hinzu:

$$x - \frac{0.75^3}{3!} + \frac{0.75^5}{5!} - \frac{0.75^7}{7!} + \frac{0.75^9}{9!} = 0.681639 .$$

Der Funktionswert ändert sich nicht mehr, wenn eine Genauigkeit von 6 Dezimalstellen gefordert ist.

Wichtig ist die Schlussfolgerung, dass man *Funktionen durch Polynome approximieren kann* (unter bestimmten Bedingungen, mit fast beliebiger Genauigkeit). Man schreibt

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5. \quad (5.20)$$

Für andere Funktionen gelten analoge Betrachtungen.

Eine andere sehr häufige Problemstellung ist die sogenannte *Kurvendiskussion*. Bei Verwendung von Programmen scheint die Betonung dieses Bereiches in vielen Lehrplänen vom heutigen Standpunkt aus beinahe schon etwas überstrapaziert.

Wir starten mit

$$y(x) = x^3 - 7x + 6$$

und geben eine Reihe von Schritten an, die *charakteristische Eigenschaften* der durch diese Gleichung dargestellten Kurve zeigen werden.

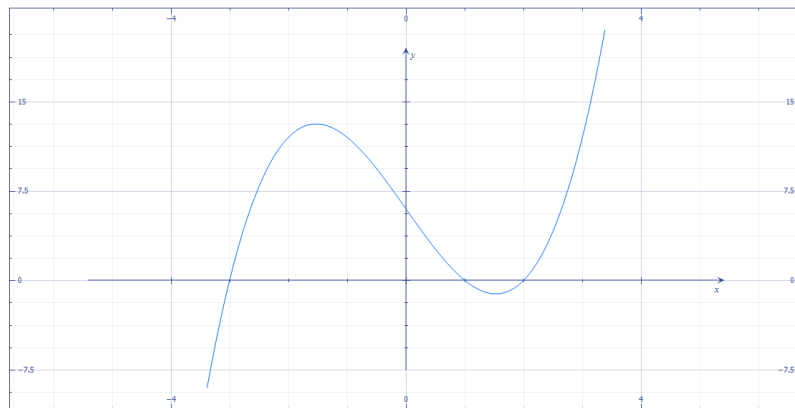


Abbildung 5.3: Die Funktion $y(x) = x^3 - 7x + 6$

- Direkt aus dem Bild sehen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$$

5 Integralrechnung

gilt. x^3 wird immer größer, für negative Zahlen sind die Werte negativ, für positive Zahlen positiv. Mathematisch kann man das genau nachweisen, indem man schreibt:

$$y(x) = x^3 - 7x + 6 = x^3 \cdot \left(1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right).$$

Das Verhalten der Funktion wird für wachsende bzw. abnehmende x nur noch von x^3 bestimmt.

- Der Schnittpunkt mit der y -Achse ist der Punkt $(0, 6)$. Diesen Punkt erhält man durch Einsetzen von $x = 0$.
- Die Nullstellen der Funktion (d.h. die Schnittpunkte mit der x -Achse) ergeben sich mit Hilfe eines Programmes zu $x = -3$, $x = 1$ und $x = 2$. Andere Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen werden damit nicht überflüssig. Ein Beispiel für ein Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen, das ohne Ableitungen auskommt, ist die *Regula falsi*, bei der man das Intervall zwischen einem positiven und einem negativen Funktionswert iterativ so oft halbiert bis man den Wert der Nullstelle ausreichend genau bestimmt hat. Solche Verfahren werden in den Hintergrund gedrängt und im Programm versteckt. Für den *Anwender* ist es aber sehr bequem, wenn er sich die erforderliche Rechenarbeit ersparen kann.
- Als nächstes bestimmen wir den Anstieg von Tangenten an die Kurve mit Hilfe der ersten Ableitung:

$$y'(x) = 3x^2 - 7.$$

Sie nimmt den Wert 0 an für $x = -\sqrt{21}/3 \approx -1.53$ und für $x = \sqrt{21}/3 \approx 1.53$. Diese beiden Werte charakterisieren ein *relatives Maximum* bzw. ein *relatives Minimum*. Links und rechts von $x \approx -1.53$ werden die Funktionswerte kleiner (Maximum), links und rechts von $x \approx 1.53$ werden die Funktionswerte größer (Minimum).

Ein positiver Anstieg der Tangenten liegt vor für

$$y'(x) = 3x^2 - 7 > 0,$$

d.h. rechts von 1.53 und links von -1.53 . Innerhalb dieses Intervalls ist

$$y'(x) = 3x^2 - 7 < 0.$$

5 Integralrechnung

Wir erinnern uns daran, dass der Anstieg der Tangens des Winkels ist, der sich ergibt, wenn wir uns von der x -Achse in Richtung Tangente bewegen.

- Die letzte Eigenschaft, die hier erwähnt werden soll, ist die *Krümmung* einer Kurve. Gehen wir zurück zur Abbildung 5.3, dann kann man zwei typische Situationen unterscheiden:

1. Wir verbinden zwei Punkte, die auf der Kurve liegen, durch eine Gerade und alle Punkte der Kurve liegen *unter* der Geraden, dann liegt eine *konvexe* Krümmung vor. Das ist im Beispiel für beliebige $x_1, x_2 \geq 0$ der Fall.
2. Wir verbinden zwei Punkte, die auf der Kurve liegen, durch eine Gerade und alle Punkte der Kurve liegen *über* der Geraden, dann liegt *konkave* Krümmung vor. Das ist im Beispiel für beliebige $x_1, x_2 \leq 0$ der Fall.

Dieser Sachverhalt lässt sich durch die zweite Ableitung ausdrücken oder charakterisieren: für $y''(x) > 0$ ist die Krümmung konvex, für $y''(x) < 0$ ist die Krümmung konkav. Für das Beispiel gilt:

$$y''(x) = 6x .$$

Das bedeutet, dass rechts vom Nullpunkt die Krümmung konvex ist, links vom Nullpunkt ist sie konkav. Im Punkt $x = 0$, dort ist die zweite Ableitung gleich 0, wechselt die Krümmung ihren Charakter, es liegt ein *Wendepunkt* vor.

Sehr instruktiv ist auch die Bestimmung der Bogenlänge der Kurve einer Funktion zwischen zwei Punkten.

- Dazu unterteilen wir die x -Achse wieder in Intervalle Δx (hier im Beispiel beginnen wir mit $\Delta x = 1$).
- Danach wird die Differenz Δy der y -Werte berechnet.
- In den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken gilt für die Hypotenuse

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 . \quad (5.21)$$

5 Integralrechnung

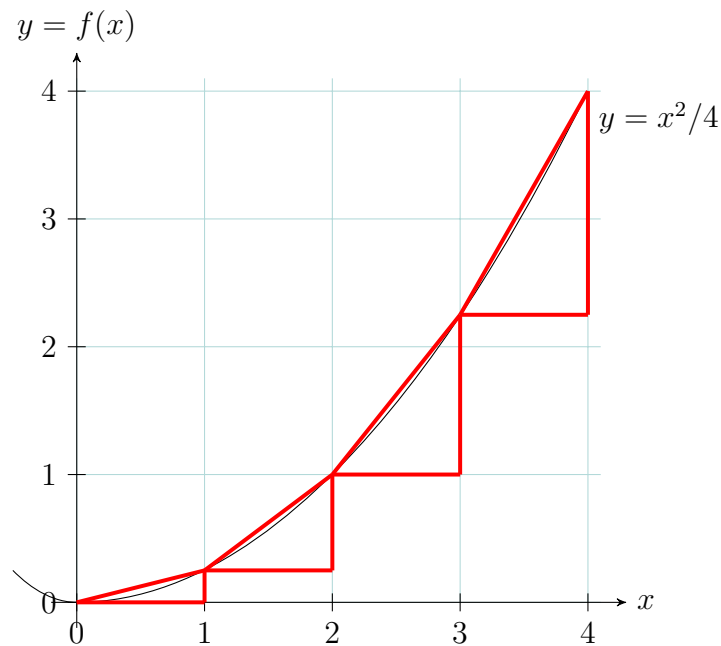


Abbildung 5.4: Die Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve

Die Summe der Längen der Hypotenusen ist offensichtlich eine (gute) Annäherung an die Länge der Kurve. Im Beispiel der Funktion $y = f(x) = x^2/4$ aus der Abbildung 5.4 erhält man vier Hypotenusen, die die Längen

$$s_1 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} \approx 1,0308$$

$$s_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} \approx 1,2500$$

$$s_3 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{41}{16}} \approx 1,6008$$

$$s_4 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{16}} \approx 2,0156$$

besitzen. Ihr Gesamtwert ist annähernd gleich 5,8972.

Wenden wir uns noch einmal (5.21) zu. Die folgenden Rechenschritte führen

5 Integralrechnung

zu einer geschlossenen Formel für die Bogenlänge:

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)} \\ \Delta s &= \Delta x \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \\ \frac{\Delta s}{\Delta x} &= \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} .\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt dann schließlich

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx . \quad (5.22)$$

Für das Beispiel $y = \frac{x^2}{4}$, $a = 0$, $b = 4$ und $f'(x) = \frac{x}{2}$ erhält man schließlich den Wert

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx = 5,9158 . \quad (5.23)$$

Also ergibt das obige relativ grobe Raster schon eine sehr gute Annäherung an den korrekten Wert.

5.4 Aufgaben

Aufgabe 5.1 Beweise $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $0 < q < 1$.

Aufgabe 5.2 Warum ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}) = 1$?

Aufgabe 5.3 Welche Asymptote besitzen die Funktionen

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} ; \\ y_2(x) &= \frac{x^2}{x^2 + 1} .\end{aligned}$$

5 Integralrechnung

Aufgabe 5.4 Stelle die Nullstellenbestimmung mit Hilfe des Newtonschen Tangenten-Verfahrens dar und leite eine iterative Formel zur Berechnung der Nullstellen her!

Aufgabe 5.5 Stelle die Nullstellenbestimmung mit Hilfe der Regula falsi dar!

Aufgabe 5.6 Man diskutiere das unterschiedliche links- bzw. rechtsseitige Verhalten von $f(x)$ an der Polstelle der Funktion $\frac{1}{x}$ anhand der Abbildung 5.5!



Abbildung 5.5: Grenzwerte der Funktion $\frac{1}{x}$

Aufgabe 5.7 Trigonometrische Funktionen sind per Hand nicht sehr einfach zu behandeln, sie ergeben aber sehr oft reizvolle Darstellungen. Man berechne als Beispiel die erste und zweite Ableitung von

$$y(x) = \cos^4(x)$$

und diskutiere die entstandenen Kurvenbilder.

Aufgabe 5.8 Man zeichne und diskutiere die Funktion $y = |\cos(x)|$ und ihre erste Ableitung!

Aufgabe 5.9 Zeichne die Funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ und ihre erste Ableitung und diskutiere anhand der Bilder die Eigenschaften der beiden Funktionen.

5 Integralrechnung

Aufgabe 5.10 Bestimme mit Hilfe von Ableitungen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Körpers, wenn der zurückgelegte Weg quadratisch von der Zeit abhängt:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Aufgabe 5.11 Zwei Ladungen der gleichen Art (z.B. beides sind Elektronen, also negative Ladungen) stoßen sich gegenseitig ab. Nach dem Coulombschen Gesetz gilt für die zwischen den Ladungen q_1 und q_2 bei einem Abstand r wirksame Kraft F :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

wobei

$$\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$$

die elektrische Feldkonstante ist. Die Arbeit W die aufgebracht werden muss, um den Abstand von Radius von r_1 auf r_2 zu verkleinern, ist

$$W = \int_{r_2}^{r_1} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} dr.$$

Berechnen Sie die aufzubringende Arbeit zur Verringerung des Abstands der Ladungen von r_1 auf r_2 .

5.5 Lösungen

Lösung 5.1 Wir schreiben die Summenformel zweimal auf und multiplizieren die zweite Formel mit q :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sum_{k=0}^n q^k &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \\ q \cdot \sum_{k=0}^n q^k &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}. \end{aligned}$$

Jetzt subtrahiert man den zweiten Ausdruck vom ersten:

$$(1 - q) \cdot \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1},$$

5 Integralrechnung

und damit erhält man sofort das gesuchte Ergebnis

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} . \quad (5.24)$$

An diesem Ergebnis sieht man zunächst, dass $q \neq 1$ gelten muss, da man nicht durch 0 dividieren darf. Und schließlich kann man auch die Summe der geometrischen Reihe bestimmen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} . \quad (5.25)$$

Das gilt natürlich nur für $0 < q < 1$.

Für $q > 1$ wird q^n schnell größer, Zähler und Nenner in (5.24) sind beide negativ, und damit divergiert die Summe gegen ∞ .

Als weitere Übung kann man sich diese Aufgabenstellung für $q < 0$ überlegen. Wir wählen beispielsweise $q = -\frac{1}{2}$. Dann entsteht die folgende Summe:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots \frac{2}{3}$$

Einige Schritte auf dem Taschenrechner reichen aus, um $0,666666\dots = \frac{2}{3}$ als Ergebnis zu erhalten.

Für negative Werte von q zwischen -1 und 0 gelten demzufolge ganz analoge Betrachtungen.

Man muss sich also vor solchen Beweisen nicht fürchten. Man kann sie durchaus auch irgendwo nachschlagen und dann Zeile für Zeile nachvollziehen. Dort darf man natürlich dann keine Zeile überspringen.

Lösung 5.2 Die beiden Brüche $\frac{7}{x^2}$ sowie $\frac{6}{x^3}$ streben beide gegen 0, wenn die Werte von $|x|$ immer größer werden. Damit hat man sofort 1 als Grenzwert nachgewiesen.

Für $x \rightarrow 0$ ist x^3 die entscheidende Größe, so dass rechts von $x = 0$ der Wert $y \rightarrow +\infty$ und links davon $y \rightarrow -\infty$ ergibt.

5 Integralrechnung



Abbildung 5.6: Die Funktion $y = 1 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}$

Hier ist auch eine gute Gelegenheit, sich die Regeln für Ungleichungen in Erinnerung zurückzurufen, beispielsweise

$$x, y > 1, \quad x > y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \quad (5.26)$$

usw.

Lösung 5.3 Eine einfache Lösung erhält man, indem man im Zähler und im Nenner jeweils die höchste Potenz von x ausklammert. Man erhält

$$y_1(x) = \frac{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Also ist $y = x$ die gesuchte Asymptote, da alle Brüche mit Potenzen von x im Nenner gegen 0 streben. Dieses Verhalten sieht man sehr schön, wenn man die Funktion grafisch darstellt. Mit der Funktion

$$y_2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

verfährt man in gleicher Weise. Es ist

$$y_2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Damit ist $y = 1$, also eine Parallele zur x -Achse, die gesuchte Asymptote.

5 Integralrechnung

Lösung 5.4 Das Verfahren wird eigentlich nicht benötigt, wenn wir ein Programm benutzen, da ja für viele Ausdrücke der Form $f(x) = 0$ die Lösungen bereitgestellt werden. Es steckt aber eventuell im Hintergrund des Programms und kann sehr schön die Ideen eines Näherungsverfahrens illustrieren. Wir nehmen als Beispiel die Funktion $y(x) = x^2 - 1$. Hier weiß man natürlich, dass $x = 1$ und $x = -1$ die Nullstellen sind. Wir wollen die Annäherung an eine Nullstelle in einer Reihenfolge von Schritten realisieren (siehe Abbildung 5.7).

- Als erstes bestimmen wir $y'(x) = 2x$. Das ist der Anstieg einer Tangente in jedem Punkt x .
- Wir beginnen das Verfahren beispielsweise mit $x = 2$.

Allgemein ist die Gleichung einer Geraden gegeben durch

$$y = mx + n .$$

Den Wert für m erhält man durch den Wert der Ableitung im

5 Integralrechnung

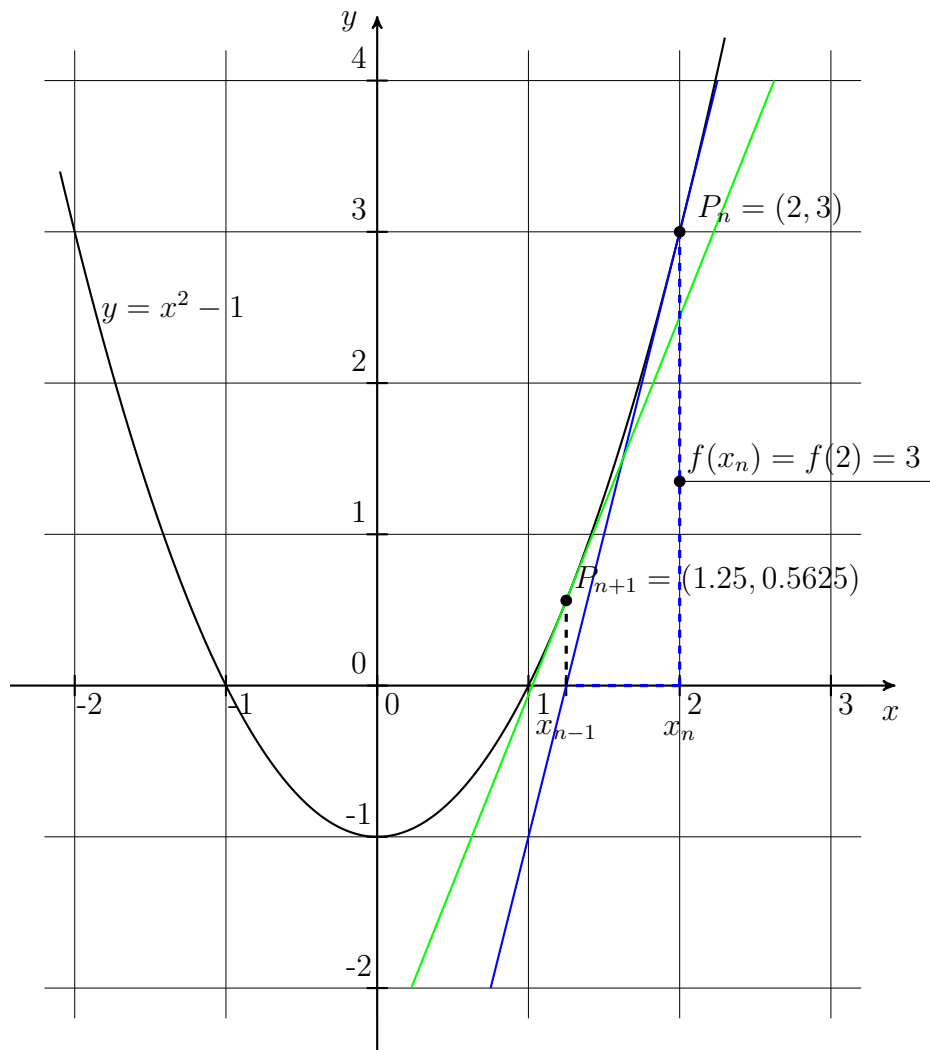


Abbildung 5.7: Das Newtonsche Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 1$

Punkt $x = 2$, also $m = 2 \cdot 2 = 4$. Damit erhält man die Gleichung

$$y = 4x + n .$$

Zur Bestimmung von n setzen wir den Punkt $(x, y) = (x, f(x)) = (2, 2^2 - 1) = (2, 3)$ in die Gleichung ein:

$$3 = 4 \cdot 2 + n ,$$

was es erlaubt, den Wert von n zu bestimmen. Man erhält $n = -5$, also

5 Integralrechnung

insgesamt

$$y = 4x - 5 .$$

- Diese Tangente hat die Nullstelle $x = 5/4 = 1,25$. Sie ist also schon an $x = 1$ herangerückt.
- Jetzt ist $y(\frac{5}{4}) = \frac{9}{16}$ und $y'(\frac{5}{4}) = \frac{5}{2}$, was zu einer Tangentengleichung

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{41}{16}$$

führt. Die Nullstelle dieser Tangente liegt bei $x = 1,025$, ist also fast schon gleich 1.

- Führt man dieses Verfahren weiter fort, so kann man sich der Nullstelle mit beliebiger Genauigkeit annähern.

Mit Hilfe der Abbildung 5.7 findet man die Formel für die iterative Berechnung der Nullstelle nach dem Newtonschen Tangenten-Verfahren. Der Anstieg der (blauen) Tangente im $P_n = (2,3)$ ist gleich der Ableitung f' der Ausgangsfunktion $y = f(x) = x^2 - 1$ in diesem Punkt, also $f'(x_n)$. Dieser Anstieg kann auch als Quotient der Katheten $f(x_n)$ und $x_n - x_{n+1}$ des hervorgehoben (blauen) rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden. Damit ergibt sich

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

und umgestellt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} . \quad (5.27)$$

In dieser Form sieht man sehr deutlich den iterativen Charakter der Methode: Man berechnet einen neuen Wert x_{n+1} , wenn man einen Wert x_n hat und in diesem Punkt den Funktionswert $f(x_n)$ und die Ableitung $f'(x_n)$ berechnet. Einen Startwert x_0 kann man natürlich aus der grafischen Darstellung finden.

Ein anderes „klassisches Verfahren“ zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion ist die *Regula falsi*.

5 Integralrechnung

Lösung 5.5 Diese Aufgabe hat nichts mit der Bildung von Ableitungen zu tun, sie soll nur ein anderes iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen veranschaulichen, das häufig zur Diskussion steht. Als Beispiel wählen wir

$$y = x^3 - x + 1 .$$

Anhand einer Zeichnung sehen wir, dass eine Nullstelle zwischen -1 und -2 liegen muss, was durch $f(-2) = -5$ und $f(-1) = 1$ bestätigt wird. Nun halbieren wir das Intervall und berechnen $f(-1,5) = -0.875$. Also muss die Nullstelle zwischen -1.5 und -1 liegen. Man kann schon sehen, wie sich das Verfahren weiterentwickelt: als nächstes steht -1.25 zur Diskussion. Der Funktionswert ist gleich $0,30$ und damit positiv. Das grenzt die Nullstelle auf den Bereich zwischen -1.5 und -1.25 ein. Indem wir die Intervalle, die zur Diskussion stehen, fortlaufend halbieren, also immer kleiner machen und je nach Vorzeichen das linke oder rechte Teilintervall weiterverwenden, können wir die Nullstelle $x \approx -1,3247$ mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.

Lösung 5.6 Anhand der Darstellung der Funktion sieht man, dass $x \rightarrow 0$ davon abhängt, von welcher Seite man sich nähert. Es gibt also einen Unterschied zwischen $x \rightarrow +0$ und $x \rightarrow -0$. Im ersten Fall werden die Werte von $\frac{1}{x}$ immer größer und sind positiv, also ist

$$\lim_{x \rightarrow +0} = +\infty ,$$

nähert man sich von links, dann werden die absoluten Werte von $\frac{1}{x}$ auch immer größer, die Werte sind aber stets negativ, demzufolge ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow -0} = -\infty .$$

Wenn die Werte von x immer größer werden, dann rückt $\frac{1}{x}$ immer mehr an 0 heran, einmal von der negativen und einmal von der positiven Seite.

Lösung 5.7 Zuerst schaut man sich die Funktion an. Die x -Werte, für die $\cos(x) = 0$ bzw. $\cos(x) = 1$ ist, behalten ihren Wert. Ansonsten treten wegen der 4. Potenz nur positive Werte auf. Zum Vergleich ist in der Abbildung 5.8 die Funktion $y = \cos(x)$ mit eingezeichnet.

5 Integralrechnung

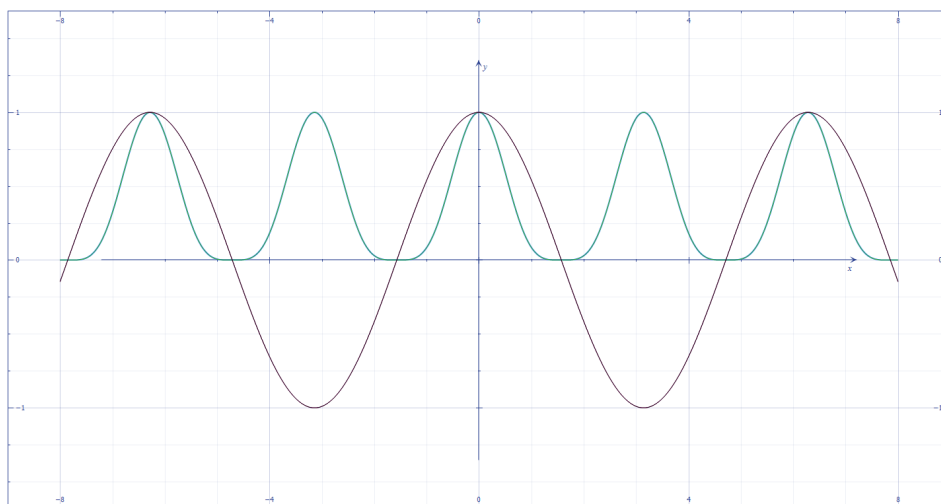


Abbildung 5.8: Die Ausgangsfunktion $\cos^4(x)$ im Vergleich mit $\cos(x)$

Hier handelt es sich um eine „klassische“ Anwendung der Kettenregel.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

Man setzt $t(x) = \cos(x)$ und $y(t) = t^4$ und verwendet

$$\frac{dt}{dx} = -\sin(x) \quad \text{sowie} \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3 .$$

Danach fügt man die Teile zusammen, es ergibt sich

$$\frac{d \cos^4(x)}{dx} = -4 \sin(x) \cos^3(x) .$$

Die Lösungen der Gleichung $-4 \sin(x) \cos^3(x) = 0$ kennzeichnen ja die Extremwerte der Funktion $y(x) = \cos^4(x)$. Diese Lösungen entsprechen einmal, da es sich ja um ein Produkt handelt, den Lösungen von $\sin(x) = 0$, das sind die Maxima der Funktion - also $x = 0, x = \pm\pi, \dots$, das andere Mal muss $\cos(x) = 0$ sein, was für $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$, gilt. Bei ihnen handelt sich um die Minima der Funktion.

Zur Berechnung der zweiten Ableitung basierend auf dem Ergebnis der ersten Ableitung verwendet man die Produktregel mit

$$u(x) = -4 \sin(x) \quad \text{und} \quad v(x) = \cos^3(x)$$

5 Integralrechnung

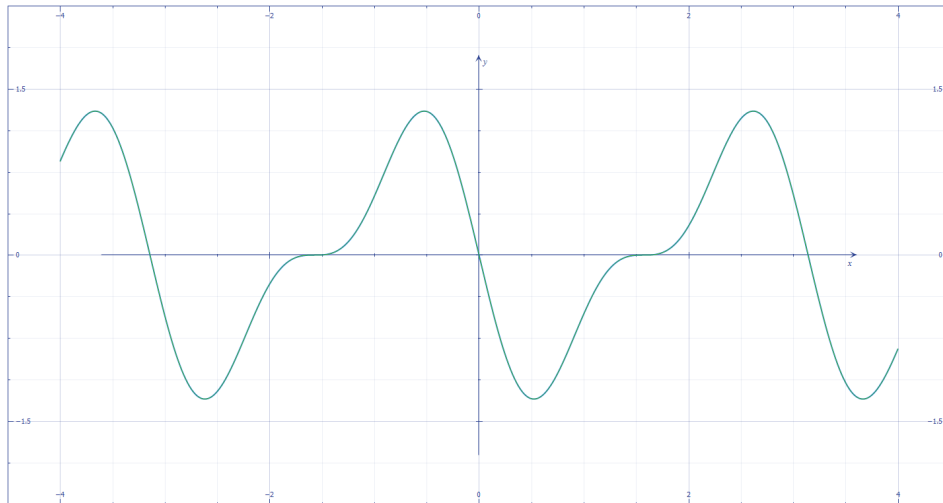


Abbildung 5.9: Ableitung der Funktion $\cos^4(x)$

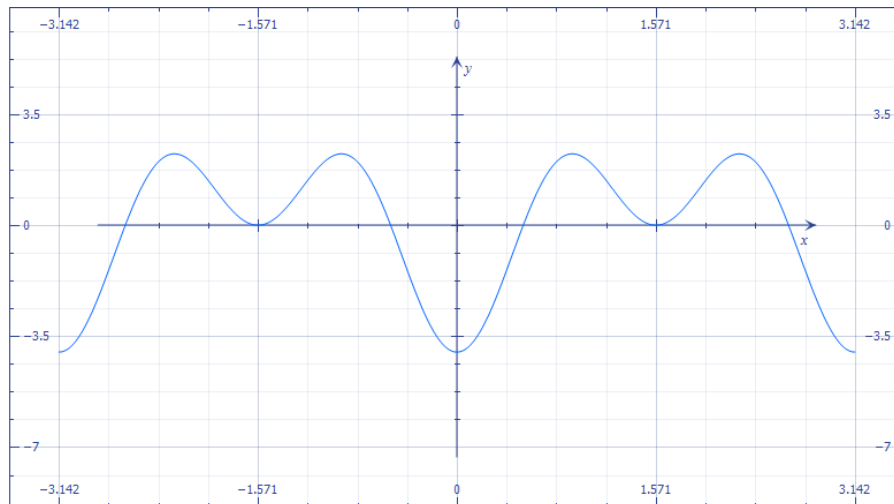


Abbildung 5.10: Zweite Ableitung der Funktion $\cos^4(x)$

und erneut die Kettenregel für $t(x) = \cos(x)$ und $y(t) = t^3$. Als Ergebnis der zweiten Ableitung $y''(x)$ für $y(x) = \cos^4(x)$ ergibt sich:

$$y''(x) = 12 \sin^2(x) \cos^2(x) - 4 \cos^4(x) .$$

Die Abbildung 5.10 zeigt den Funktionsverlauf dieser zweiten Ableitung. Minima ergeben sich für $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$, da $\sin(x)$ an diesen Stellen den Wert 0 besitzt. Nullstellen der zweiten Ableitung von $y(x) = \cos^4(x)$ gibt es für $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$, da an diesen Stellen $\cos(x) = 0$ gilt.

5 Integralrechnung

Lösung 5.8 Die Abbildung 5.11 zeigt das Bild der Funktion $y = |\cos(x)|$. Daran ist eigentlich nichts Besonderes. Lediglich in den Punkten $x = \pm \frac{\pi}{2}$ und entsprechenden Vielfachen hat die Kurve eine „Ecke“. Sie wird durch den absoluten Betrag sofort wieder in die Gegenrichtung „gezwungen“. Je

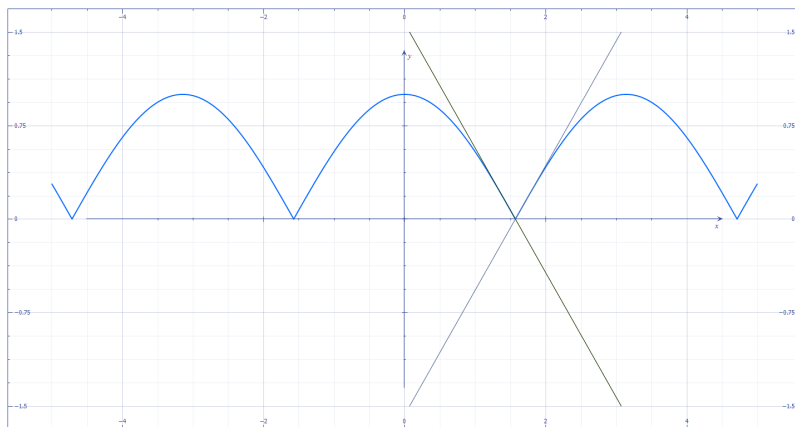


Abbildung 5.11: Ableitungen der Funktion $y = |\cos(x)|$

nachdem ob man sich dem Wert $x = \frac{\pi}{2}$ ausschließlich von links oder nur von rechts nähert, erhält man zwei verschiedene Tangenten:

$$y = -x + \frac{\pi}{2} ,$$

$$y = x - \frac{\pi}{2} .$$

Man sagt im allgemeinen, dass die Funktion in einem solchen Punkt nicht differenzierbar ist, man kann aber betonen, dass eine rechts- und eine linksseitige Ableitung existiert.

Lösung 5.9 Die Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ ist, falls wir nur reelle Zahlen zulassen wollen, nur für $-1 \leq x \leq +1$ definiert, sie ist symmetrisch zu $x = 0$, dort nimmt sie auch ihr Maximum an. Die erste Ableitung hat die folgende Gestalt:

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Für $x = 0$ ist die Ableitung gleich 0, damit wird das Maximum angezeigt, für $x \rightarrow -1$ und $x \rightarrow +1$ liegt der Nenner der Ableitung immer näher bei 0,

5 Integralrechnung

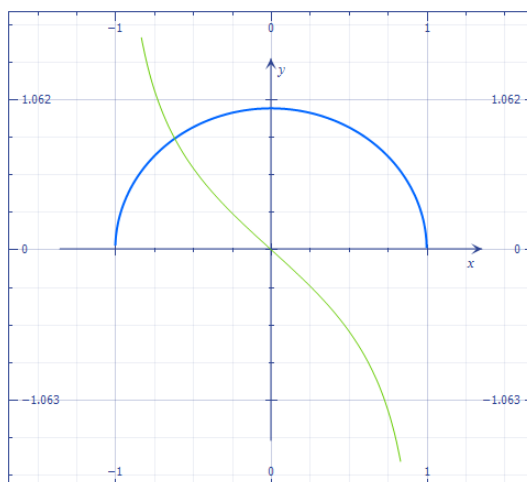


Abbildung 5.12: Die Funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ und ihre erste Ableitung

entsprechend dem Vorzeichen von x ist dann

$$\lim_{x \rightarrow -1} y'(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} y'(x) = -\infty .$$

Man vergleiche das mit der Abbildung 5.12

Lösung 5.10 Hier handelt es sich um ein Beispiel aus der Physik. Es wird der in einer Zeiteinheit (beispielsweise einer Sekunde) zurückgelegte Weg beschrieben. g ist die Newtonsche Gravitationskonstante, deren Wert die Fallbeschleunigung ausdrückt und näherungsweise mit $9,81 \frac{m}{s^2}$ angegeben wird. Näherungsweise gilt:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 . \quad (5.28)$$

Man erhält die Geschwindigkeit v , also die Änderung des Weges pro Zeiteinheit, als erste Ableitung von $s(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt} = g \cdot t . \quad (5.29)$$

Die Beschleunigung, also die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ergibt sich als zweite Ableitung von s bzw. als Ableitung von v nach t :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g . \quad (5.30)$$

5 Integralrechnung

Im Normalfall wird g als konstant angesehen, der Wert ist aber von vielen geographischen Umständen abhängig, die aber hier nicht weiter diskutiert werden sollen.

Wir können auch den Weg umgekehrt gehen. Für $t = 0$ ist jetzt $v = 0$ und $s = 0$.

Durch Integration von (5.30) erhält man

$$v = g \cdot t + v_0 . \quad (5.31)$$

Eine Bewegung kann eine Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ berücksichtigen. Nochmalige Integration ergibt

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 t + s_0 . \quad (5.32)$$

Die Bewegung muss also nicht bei $s = 0$ beginnen, sondern kann einen beliebigen anderen Startpunkt berücksichtigen.

Lösung 5.11 Die konstanten Faktoren können aus dem Integral heraus gezogen werden. Als Stammfunktion von r^{-2} ergibt sich nach der Regel für Potenzen

$$(-2 + 1) \cdot r^{-2+1} = -r^{-1} = -\frac{1}{r} .$$

Insgesamt erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} dr \\ &= \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_2}^{r_1} \\ &= \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) . \end{aligned}$$

Der Wert vom Anfangsradius r_1 ist größer als der Wert vom Endradius r_2 der Bewegung. Durch die Kehrwerte ergibt sich somit ein positiver Wert der aufzubringenden Arbeit, der um so größer wird, je kleiner der Endradius r_2 ist.

6 Anhang

6.1 Wie verwendet man Taschenrechner und Programme?

6.2 Wie löst man Textaufgaben?

Viele haben keine Schwierigkeit, eine Aufgabe zu lösen, wenn sie in mathematischer Form gegeben ist. Es bereitet aber Schwierigkeiten, ein Problem in die Gestalt von Formeln zu bringen.

Im ersten Fall ist klar gesagt, was gemacht werden soll, und die zur Verfügung stehenden Formeln und Algorithmen stehen fest. Im zweiten Fall handelt es sich aber um ein Alltagsproblem, für das ein mathematisches Modell aufgestellt werden soll. Dabei steht die Form des Modells relativ fest; sie entspricht dem zuletzt behandelten Stoff. Bei Prüfungen, die einen größeren Zeitraum übertreffen, macht aber schon die Art des Modells Schwierigkeiten.

Beispiel 6.1 *Ein Student will sich ein Moped kaufen, das 1600 € kostet. Seine Eltern wollen ihm die Hälfte dazugeben. Als Hilfsassistent verdient er 120 € im Monat. Wann kann er das Moped bezahlen?*

1. Man muss die Aufgabe gründlich lesen, damit man sie richtig versteht. Es sollte zulässig sein, zu fragen, wenn das nicht versteht. Im Beispiel besteht das Ziel darin, 1600 € zusammenzubekommen.
2. Da die Eltern die Hälfte, also 800 € dazugeben wollen, entsteht ein neues Ziel: der Student muss 800 € verdienen.

3. Wir bezeichnen die Anzahl der Monate mit x : $x \cdot 120 = 800$ ist die Gleichung, deren Lösung garantiert, dass er die benötigt Kaufsumme zur Verfügung hat. Als Gleichung formuliert:

$$x \cdot 120 \geq 800.$$

Die Lösung ist natürlich einfach; es muss $x \geq \frac{800}{120} \approx 6,66$ Monate sein. Da er sein Honorar nur am Ende eines Monats erhält, muss er also sieben Monate sparen. Hier muss man natürlich die Frage stellen, ob er seinen ganzen Verdienst sparen kann oder ob man die Summe, die monatlich gespart wird, reduzieren muss.

Bei geometrischen Aufgaben muss man nach dem ersten Schritt noch einen Schritt einfügen, bei dem eine Skizze angefügt wird.

6.3 Wie gestaltet man ein Projekt?

Ein Projekt der 6. Klasse eines Schweizer Gymnasiums bestand in der Frage: Definiere, erkläre und konstruiere alle Eigenschaften, Punkte, Geraden, Winkel und Kreise, die am Dreieck auftreten.

Dieses Projekt hat das Ziel, das Wissen aufzuarbeiten, das im Unterricht bereits dargestellt wurde. Das sollte ergänzt werden um weiteres Wissen aus der Literatur und aus dem Internet. Die Konstruktionen sollten die eigenständige aktive Anwendung des Wissens herausfordern und den Umgang mit geeigneter Software kennenlernen.

Bevor man mit der eigentlichen Arbeit beginnt, muss Klarheit geschaffen werden, ob man die Aufgabe richtig verstanden hat. Das geschieht natürlich im wesentlichen durch Konsultation des Lehrers. Es sollte auch erkennbar sein, welchen Umfang die Darstellung haben soll und in welcher Form das Ergebnis vorliegen soll. Es ist günstig, wenn die zu verwendende Software vorher vom Lehrer ausgesucht und den Schülern mitgeteilt wird. Das erleichtert dem Lehrer die spätere Korrektur, und es ermöglicht den Schülern, sich gegenseitig zu helfen.

Viele Eltern haben sofort das Argument zur Hand: „*Das habe ich schon damals nicht verstanden, als ich noch in die Schule ging*“ und ziehen sich oft zurück.

Sie sollten das aber eher als Herausforderung ansehen, sich wieder mit dem Stoff zu beschäftigen und einen zweiten Anlauf zu versuchen.

Ist das erledigt, kann man mit der eigentlichen Arbeit beginnen. Als Programm wurde *Geogebra* ausgewählt, dieses Programm bietet sehr viele Möglichkeiten und kann auf dem eigenen Rechner installiert werden. Man muss aber eine Zeitlang üben, damit man später nicht zu viel probieren muss. Der zentrale Begriff bei diesem Projekt ist das Dreieck. Also beginnt man seiner Definition.

Definition 6.1 *Drei Punkte A , B und C in einer Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen ein Dreieck. A , B und C sind die Eckpunkte des Dreiecks. Die Strecken $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ sind die Seiten des Dreiecks. Es ist mehr oder weniger üblich, $c = \overline{AB}$ als Grundseite horizontal zu zeichnen und den Punkt C gegenüber der Grundseite darzustellen. Die Winkel werden nach den zuehörigen Eckpunkten benannt.*

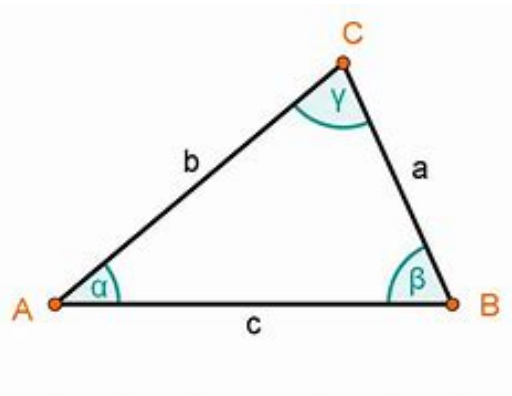


Abbildung 6.1: Das Dreieck ABC mit den Seiten a , b , c und den Winkeln α , β und γ

Für jedes Dreieck gilt die *Dreiecksungleichung*:

$$c \leq a + b. \quad (6.1)$$

Im Falle $a + b = c$ hat man gar kein Dreieck mehr, a und b sind Teilstrecken von c .

Man unterteilt die Dreiecke in folgender Weise:

6 Anhang

1. nach der Seitenlänge unterscheidet man *unregelmäßige*, *gleichschenklige* und *gleichseitige* Dreiecke;
2. nach dem Winkel unterscheidet man *spitzwinklige*, *rechtwinklige* und *stumpfwinklige* Dreiecke.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist $a = b$, bei einem gleichseitigen Dreieck ist $a = b = c$.

Für die Winkel gilt immer $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Bei einem spitzenwinkligen Dreieck sind alle drei Winkel kleiner als 90° ; bei einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel gleich 90° , bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist ein Winkel größer als 90° .

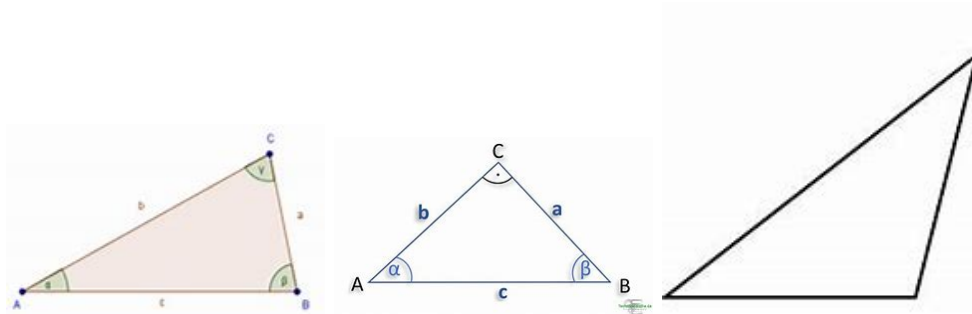


Abbildung 6.2: Ein spitzenwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck

Als nächstes sollen spezielle Linien untersucht werden, die für das Dreieck von Bedeutung sind. Man findet die folgenden Linien:

1. Für jede Seite des Dreiecks kann man eine *Höhe* definieren. Sie geht von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite, so dass dort ein rechter Winkel entsteht. Man sieht, dass sich die drei Höhen in einem Punkt schneiden. Es ist die Frage, ob das immer so ist.
2. Als nächstes wählen für jede Seite ihren Mittelpunkt und errichten dort eine Senkrechte. Diese Geraden heißen *Mittelsenkrechte*. Auch hier schneiden sich die drei Geraden in einem Punkt, der außerhalb des Dreiecks liegt. Außer der Frage, warum sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden, entsteht hier zusätzlich das Problem, ob das immer so sein muss oder ob der Schnittpunkt auch im Kreis liegen kann.

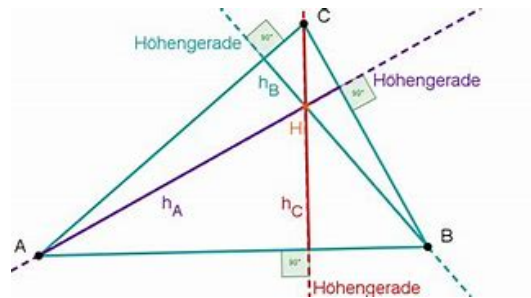


Abbildung 6.3: Das Dreieck ABC mit den Höhen h_a, h_b, h_c

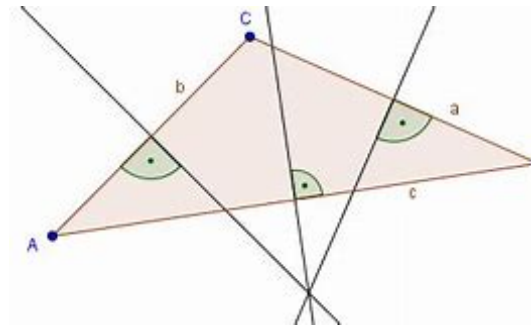


Abbildung 6.4: Das Dreieck ABC mit den Mittelsenkrechten auf den drei Seiten a, b und c

3. Die nächsten Geraden bezeichnet man als *Winkelhalbierende*. Sie gehen von den drei Eckpunkten aus und halbieren die Winkel α, β und γ . Auch hier schneiden sich die drei Geraden in einem Punkt.
4. Die nächsten Geraden bezeichnet man als *Seitenhalbierende*. Sie gehen von den drei Eckpunkten aus zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Es ist nicht verwunderlich, dass sie sich auch in einem Punkt schneiden, den man als *Schwerpunkt* bezeichnet.

Die gefundenen Punkte bieten die Grundlage für die Definition des Umkreises und des Innenkreises eines Dreiecks. Zum Zeichnen des Umkreises verwendet man den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. Beim spitzwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks.
2. Beim rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse der

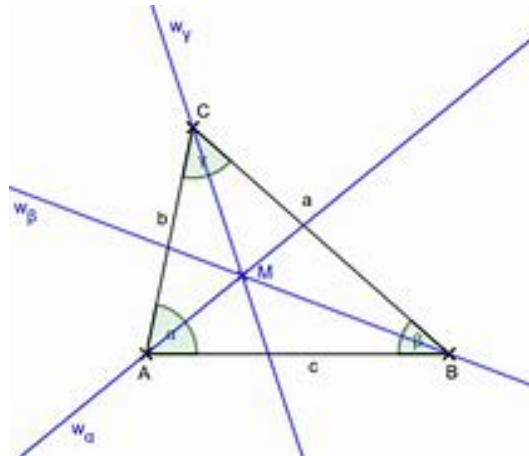


Abbildung 6.5: Das Dreieck ABC mit den Winkelhalbierenden

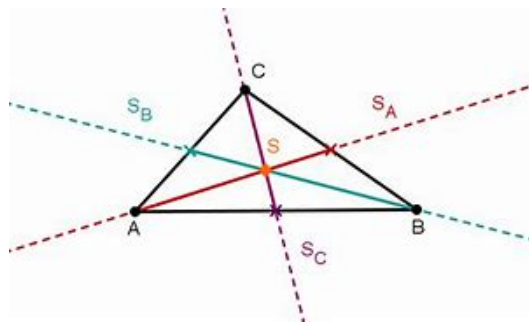


Abbildung 6.6: Das Dreieck ABC mit den Seitenhalbierenden

Mittelpunkt des Kreises.

3. Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt der Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks.

Das rechtwinklige Dreieck und der Umkreis führen uns zum *Satz des Thales*.

Satz des Thales. Verwendet man den Durchmesser eines Kreises als Seite c des Kreises und verbindet die Endpunkte A und B des Durchmessers mit einem Punkt C auf dem Kreis, dann ist der Winkel γ immer ein rechter Winkel. Dieser Satz ist einer der ältesten mathematischen Gesetze und ist seit 600 vor der Zeitrechnung bekannt.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des Inkreises.

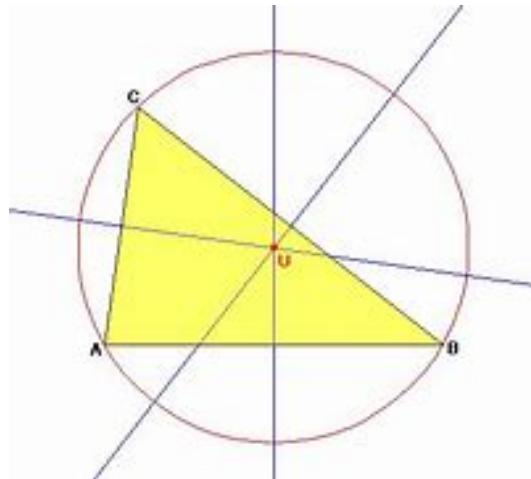


Abbildung 6.7: Der Umkreis eines Dreiecks ABC

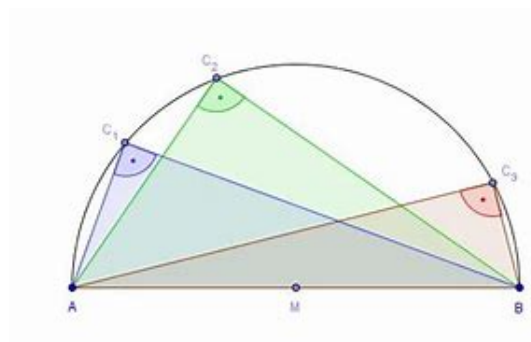


Abbildung 6.8: Thales-Kreise über einem Durchmesser

Darunter versteht man den größten Kreis, der alle drei Seiten berührt. Die drei Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Kreis.

Jetzt kehren wir wieder zu den Geraden zurück und erklären die *Eulersche Gerade*. In jedem nicht-gleichseitigen Dreieck liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U auf einer gemeinsamen Geraden, der *Euler-Geraden*. Im gleichseitigen Dreieck fallen diese drei Punkte zusammen, so dass man keine Gerade definieren kann.

Man gewinnt drei weitere interessant Punkte, wenn man die Strecke vom Schnittpunkt der Höhen bis zur jeweiligen Ecke halbiert. In der Abbildung 6.11 sind das die Punkte J, K und L.

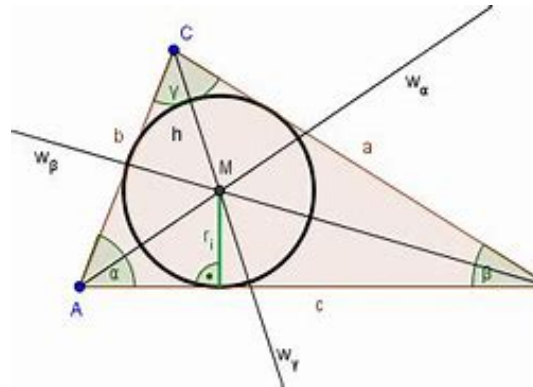


Abbildung 6.9: Der Inkreis eines Dreiecks

Der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises liegt in der Mitte der Verbindungsstrecke zwischen dem Schnittpunkt der Höhen und dem Umkreis-Mittelpunkt. Er geht durch die drei Seitenmitten des Dreiecks, durch die drei Höhenfußpunkte und die drei Punkte J, K und L. Dass dieser Kreis existiert und durch die angegebenen 9 Punkte geht, muss natürlich wieder bewiesen werden.

Man fällt fast in Ohnmacht, wenn man sieht, wie das Spiel weitergehen kann. Die Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) ist eine Online-Liste mit über 65.000 (Stand 27. August 2024) Dreieckspunkten. Sie wird gepflegt durch Clark Kimberling, Professor für Mathematik an der University of Evansville.

Jedem Eintrag in der Liste wird eine sogenannte Kimberling-Nummer in der Form X(n) zugewiesen. Zu den Informationen zu jedem Punkt gehören seine Koordinaten sowie seine Lage zu Geraden, die andere identifizierte Punkte verbinden. Die ETC bietet auch ein Glossar von Begriffen und Definitionen an.

Die 400 wichtigsten Dreieckspunkte der Online-Enzyklopädie publizierte Kimberling 1998 zudem in Buchform unter dem Titel Triangle Centers and Central Triangles.

Kehren wir noch einmal zurück in die Antike, wo auch die Schönheit der Mathematik gepflegt und betont wurde. Die drei Ankreise gehören mit dem Umkreis und dem Inkreis zu den besonderen Kreisen eines Dreiecks, die schon in der Antike von griechischen Mathematikern untersucht wurden.

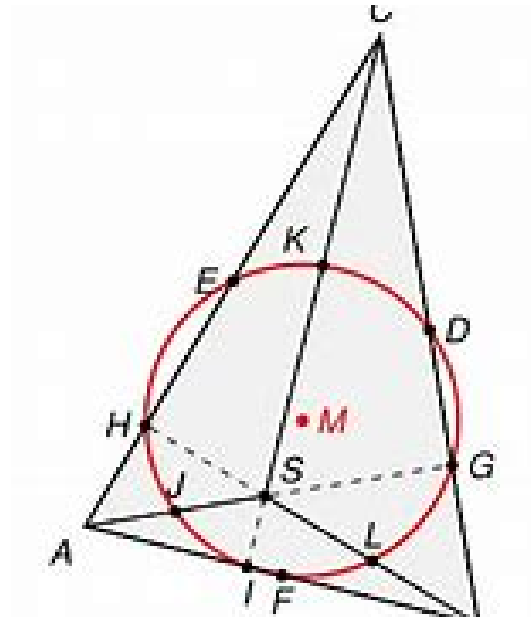


Abbildung 6.10: Der Feuerbach-Kreis eines Dreecks

Die Ankreise sind definiert als Kreise, die jeweils von einer Dreiecksseite von außen und von den Verlängerungen der beiden anderen Seiten tangential berührt werden. Jedes beliebige Dreieck besitzt drei Ankreise. Die Ankreismittelpunkte liegen jeweils auf der Winkelhalbierenden eines Innenwinkels und auf den Winkelhalbierenden der beiden Außenwinkel, die nicht zu dem Innenwinkel gehören.

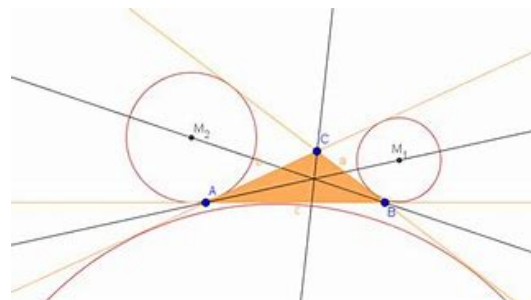


Abbildung 6.11: Der Ankreis am Dreieck