

Mathematik für das Gymnasium

Klasse 6 bis 9

Christian Posthoff
The University of the West Indies
St. Augustine Campus
Trinidad & Tobago

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	2
1.1	Natürliche und ganze Zahlen	2
1.2	Teiler und Primzahlen	8
1.3	Rationale Zahlen	17
1.4	Maßeinheiten	19
1.5	Kongruenzen und Restklassen	21
1.6	Reelle und komplexe Zahlen	22
2	Mengenlehre und Logik	33
2.1	Aussagenlogik	33
2.2	Mengen	37
3	Aufgaben und Lösungen	47
4	Abbildungen, Relationen, Funktionen, Gleichungen	59
4.1	Abbildungen	59
4.2	Relationen	60
4.3	Funktionen	64
4.3.1	Lineare Funktionen und Gleichungen	64
4.3.2	Quadratische Funktionen und Gleichungen	67
4.3.3	Polynome	69
5	Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen	74
5.1	Wurzelfunktionen und Wurzelgleichungen	74
5.2	Allgemeinere Gleichungen	80
5.3	Lineare Gleichungssysteme	83
6	Trigonometrische Funktionen	88
7	Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen	96
8	Permutationen und Kombinationen	102

Inhaltsverzeichnis

9	Transzendente Gleichungen	104
10	Aufgaben und Lösungen	108
11	Anhang	116

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Zahlenstrahl	3
1.2	Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)	5
1.3	Euklid von Alexandria (um 300 vor Chr.)	12
1.4	Eratosthenes	13
1.5	Die antike Bibliothek	13
1.6	Pierre de Fermat (1607-1665)	16
1.7	Leonhard Euler (1707-1783)	16
1.8	Der Zahlenstrahl mit negativen Zahlen	17
1.9	Das Urmeter	20
1.10	Die Gaußsche Zahlenebene	28
1.11	Das Pascalsche Dreieck	29
1.12	Blaise Pascal (1623-1662)	30
1.13	Chinesische Zahlen	32
1.14	Japanische Zahlen	32
2.1	George Boole (1815 - 1864)	33
2.2	Georg Cantor (1845 - 1918)	38
2.3	Vereinigung $A \cup B$ von zwei Mengen	39
2.4	Durchschnitt $A \cap B$ von zwei Mengen	39
2.5	Differenz $A \setminus B$ von zwei Mengen	40
2.6	Ein Hasse-Diagramm für die Menge $\{a, b, c\}$	43
2.7	David Hilbert (1862-1943)	44
3.1	Vereinfachung eines Ausdruckes	53
4.1	Halbgeordnete Mengen von Teilern	64
4.2	Geraden $y = m \cdot x$ mit verschiedenen Werten von m	65
4.3	Geraden $y = m \cdot x + n$ mit verschiedenen Werten von n	66
4.4	Parabeln an verschiedenen Stellen	68
4.5	Funktionen dritten Grades	70
4.6	Die Funktion $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	71
4.7	Die Funktion $y = \frac{1}{x}$	72

Abbildungsverzeichnis

4.8	Die Funktion $y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$	73
5.1	Die Funktionen $y_1 = \sqrt{x}$ und $y_2 = -\sqrt{x}$	75
5.2	Logarithmusfunktionen	77
5.3	Exponentialfunktionen durch $(0, 1)$ und um 1 nach oben und unten verschoben	77
5.4	Ein mechanischer Tischrechner	78
5.5	Eine Zahlentafel für die Logarithmusfunktion	78
5.6	Nautilus	79
5.7	Die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x^3 + y^3 = 1$	81
5.8	Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	82
5.9	Die Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	83
5.10	Die Funktionen $z = (x + y)^4$ und $z = -(x + y)^4$	84
5.11	Drei Ebenen mit dem Schnittpunkt $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{4}{9}, z = \frac{8}{9}$	86
6.1	Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck	88
6.2	Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$	89
6.3	$\sin(x)$ und $\cos(x)$ von 0 bis 2π	90
6.4	Periodische Fortsetzung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$	91
6.5	$\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$	92
6.6	Polarkoordinaten	93
6.7	$\tan(x)$ und $\cot(x)$	93
6.8	$\tan(\theta)$ und $\cot(\theta)$	94
6.9	$\tan^{-1}(\theta)$ und $\cot^{-1}(\theta)$	95
9.1	Lösung von $x^x = 100$	105
9.2	Lösung von $x^x = 0,776$	105
9.3	Die Kurven $x + \log(x)$ (blau) und $x \cdot \log(x)$ (grün)	106
9.4	Die Kurven $2^x + 3^y = 4$ (blau) und $5^x + 6^y = 7$ (grün)	107
10.1	Die Kurven für $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8$ (blau) und $3\sqrt{x} - 7 = -4\sqrt{y}$ (grün)	114
10.2	Die Kurve für $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{3}$	115
10.3	Die Kurve für $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{3}$ gezoomt	115

Einleitung

Durch die in den letzten 50 Jahren ständig zunehmende Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer ist die Mathematik anwendbarer als je zuvor. Das Dreieck „Mathematik - Informatik - Problem“ ist ein Schlüssel für jeden Fortschritt in Wissenschaft und Wirtschaft. Die mathematische Modellierung von Problemen, die Korrektheit der Ergebnisse und ihre umsichtige Anwendung erfordern eine gründliche Ausbildung. Aktuell wird dies unter MINT (Mathematik - Informatik - Naturwissenschaften - Technik) zusammengefasst.

Die klassischen Rechenmethoden wurden schon längst durch Computerprogramme realisiert, sie stehen beliebig zur Verfügung, ihre Leistungsfähigkeit wird ständig größer. Die klassischen Zahlentafeln und Formelsammlungen sind vollständig von der Bildfläche verschwunden. Durch die Nutzung von Computersystemen vermeidet man langwierige Rechenarbeit; die Größe der lösbaren Probleme wird ständig erweitert, ebenso das Spektrum der Probleme, für die Programme verfügbar sind.

Das Buch enthält eine Darstellung der mathematischen Konzepte, die im Gymnasium vom 5. oder 6. bis zum 12. oder 13. Schuljahr im deutschen Sprachraum unterrichtet werden. Dabei wird vor allem Wert darauf gelegt, dass die Begriffe leicht und verständlich dargestellt werden, so dass alle Fragen, die im Unterricht behandelt werden, wiederholt und gefestigt werden können. Sorgfältig ausgewählte Beispiele veranschaulichen den Stoff, Aufgabenblätter aus dem Schulunterricht können damit in jedem Falle bearbeitet werden.

Es werden auch historische Entwicklungen und Beziehungen zu anderen Disziplinen einbezogen. Es soll die Abneigung gegenüber der Mathematik, die oft schon von den Eltern an die Kinder weitergegeben wird, etwas abgebaut werden. Schließlich ist die Mathematik die Grundlage für viele andere Disziplinen und keinerlei Änderungen unterworfen. Im Buch werden viele Konzepte auf Grund ihres Inhaltes in einem Kapitel dargestellt, die im Unterricht aber auseinander liegen können. Da kann man die entsprechenden Abschnitte einfach überspringen und dann später zu ihnen zurückkehren. Es werden auch Gebiete dargestellt, die in manchen Lehrplänen gar nicht auftauchen. Diese Abschnitte kann man überspringen oder zum eigenen Vergnügen lesen. Auf Quellenangaben wird verzichtet, da die Mathematik auf diesem Niveau hinreichend bekannt ist und durch viele Lehrbücher dargestellt wird.

1 Zahlen

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ (Leopold Kronecker, 1823 - 1891)

1.1 Natürliche und ganze Zahlen

Das Zählen war schon in grauer Vorzeit bekannt und steht am Anfang der Entwicklung der Mathematik und damit auch jeder anderen Wissenschaft. Der Zahlenstrahl stellt anschaulich den Vorgang des Zählens dar. Es ist noch nichts geschehen, man geht an einen Anfangspunkt und bezeichnet ihn durch 0. Dann bewegt man sich geradlinig nach rechts, jeder Schritt führt zu einem neuen Zahlenwert, der um 1 größer ist als der links von ihm stehende. Dieser Prozess kann immer weiter fortgesetzt werden, die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine *unendliche Menge*.

Die natürlichen Zahlen werden also in folgender Weise konstruiert:

1. Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Ist eine natürliche Zahl n vorhanden, dann ist auch der Nachfolger $n' = n + 1$ eine natürliche Zahl.

Es ist selbstverständlich, dass die Zahl 0 nicht der Nachfolger irgend einer anderen natürlichen Zahl ist. Ebenso ist es klar, dass zwei Zahlen, die den gleichen Nachfolger haben, auch selbst gleich sein müssen. Diese Charakterisierung der natürlichen Zahlen wurde erstmals von G. Peano (1858-1932) vorgenommen.

Man zählt von 0 bis 9, danach führt man keine neuen Symbole ein, sondern bezeichnet die nächste Zahl durch 10. An der ersten Stelle von links erscheint jetzt die Ziffer 1, daneben eine 0. Das setzt sich fort bis zur 19, danach erscheint

1 Zahlen

2 an der ersten Stelle. Das ist ein sehr wichtiger Punkt für das Verständnis der Darstellung von Zahlen. Die Ziffernfolge 37 ist so zu verstehen:

$$37 = 3 \cdot 10 + 7$$

Das kann man beliebig weit nach links fortsetzen und jeder beliebigen Ziffernfolge einen Zahlenwert zuordnen. Im Alltag wird stets die Zahl 10 als Grundlage genommen (*Dezimalsystem*), in der Computerwelt spielt die Zahl 2 eine wichtige Rolle (*Dualsystem*), ebenso die Zahl 16 (*Hexadezimalsystem*). Noch ein größeres Beispiel:

$$4\,567\,802 = 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 2.$$

Die Exponenten der Zahl 10 geben an, wie oft die 10 als Faktor auftritt: $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$. Jede Ziffer repräsentiert einen bestimmten Wert, der von der Stelle abhängt, an der sie auftritt. Deshalb bezeichnet man diese Schreibweise auch als *Stellenwertsystem*. Die einzelnen Positionen bezeichnet man von rechts nach links als Einer, Zehner, Hunderter, Tausender ...

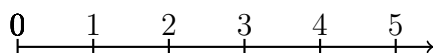


Abbildung 1.1: Der Zahlenstrahl

Die erste Operation, die man bei natürlichen Zahlen betrachtet, ist die *Addition*. Die Schreibweise $4 + 3$ bedeutet, dass man erst vier, danach drei Schritte nach rechts geht, und man langt bei der Zahl 7 an. Die folgenden Eigenschaften der Addition sind offensichtlich.

1. Für jede natürliche Zahl n ist

$$n + 0 = n.$$

Die 0 ist bei der Addition ein *neutrales Element*. Sie ändert den Wert bzw. die Position auf dem Zahlenstrahl nicht.

2. Die Addition zweier natürlicher Zahlen ergibt wieder eine natürliche Zahl.

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$$

$\forall x$ ist eine Abkürzung und bedeutet „für alle x “. Das Zeichen $\in$ bedeutet „ist ein Element von“.

1 Zahlen

3. Für zwei natürliche Zahlen n und m ist

$$n + m = m + n.$$

Die Addition ist *kommutativ* (lateinisch *commutare* - *vertauschen*).

4. Für drei natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3 ist

$$(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3) = n_1 + n_2 + n_3.$$

Die Operation ist *assoziativ* (lateinisch *associare* - *zusammenarbeiten*). Es kommt bei der Addition mehrerer natürlicher Zahlen nicht auf die Reihenfolge an, in der die Zahlen verwendet werden.

Das Stellenwertsystem erlaubt es, beliebige natürliche Zahlen zu addieren, wobei in jeder Position nur die Zahlen 0 bis 9 auftreten. Die beiden Zahlen müssen stellengerecht geschrieben werden: Einer über Einer, Zehner über Zehner usw.

Übertrag		1	1	1	
1. Zahl	4	3	6	8	4
2. Zahl		1	7	7	7
Ergebnis	4	5	4	6	1

Ist der Wert, der sich als Ergebnis in der Einerstelle ergibt, wie hier im Beispiel gleich 11, dann schreibt man die 1 als Ergebnis in die letzte Stelle, der Zehner wird in die nächste Stelle nach links übertragen. Der Übertrag kann immer nur gleich 1 sein.

Die nächste Operation ist die *Multiplikation*. Jetzt liegt eine größere Schrittweite vor. Man kann beispielsweise $n = 7$ wählen und erhält der Reihe nach $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $3 \cdot 7 = 21$ usw.

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \cdot m \in \mathbb{N}$$

Die folgenden Eigenschaften der Multiplikation sind offensichtlich.

1. Für jede natürliche Zahl n ist

$$n \cdot 1 = n.$$

Die 1 ist bei der Multiplikation ein *neutrales Element*. Sie ändert nichts.

1 Zahlen

2. Für zwei natürliche Zahlen n und m ist

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Die Multiplikation ist *kommutativ*.

3. Für drei natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3 ist

$$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3.$$

Die Operation ist *assoziativ*.



Abbildung 1.2: Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)

Der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß machte schon als Kind in der Schule auf sich aufmerksam. Sein Lehrer wollte die Klasse für eine Weile beschäftigen und stellte ihr die folgende Aufgabe: *Addiere die Zahlen von 1 bis 100*. Schon nach kurzer Zeit meldete sich Gauß mit dem Ergebnis. Er schrieb die Zahlen zweimal auf, einmal vorwärts und einmal rückwärts.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Die Addition der beiden Zeilen ergibt hundertmal den Wert 101. Der Rest ist einfach: $100 \cdot 101 = 10\,100$. Dieses Ergebnis muss man noch durch 2 teilen, da jede Zahl zweimal verwendet wurde. Damit erhält man 5 050. In mathematischer Schreibweise sieht das dann für eine beliebige Endzahl n so aus:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}. \quad (1.1)$$

1 Zahlen

Man kann natürlich auch die Zahl 0 mit hinzufügen:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Hier wird ein mathematisches Symbol eingeführt, das es erlaubt, große, nach einem bestimmten Schema aufgebaute Summen abzukürzen. Das Zeichen $\sum$ ist der große griechische Buchstabe *Sigma*. Die Variable i verkörpert die Zahlen, die addiert werden sollen. Sie beginnt mit dem Wert 0, dieser Anfangswert steht unter dem Summenzeichen, und sie endet mit dem Wert n , der über dem Summenzeichen steht. Dazwischen wird sie immer um 1 erhöht. Das Gaußsche Problem würde dann so formuliert sein:

$$\text{berechne } \sum_{i=0}^{100} i.$$

Diese Formel gibt uns die Gelegenheit, das *Beweisverfahren der vollständigen Induktion* zu demonstrieren. Es besteht aus zwei Schritten.

- Eine bestimmte Aussage gilt für die Zahl 0 oder 1.
- Wenn aus der Gültigkeit für die Zahl n die Gültigkeit für die Zahl $n+1$ folgt, dann gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Schauen wir uns das für die Summenformel an: für $n=0$ ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 0$; für $n=1$ ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1$. Also gilt die Formel für den Anfangswert.

Jetzt setzen wir die Gültigkeit der Formel für eine beliebige Zahl n voraus.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Wir addieren die Zahl $n+1$ zu $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ und erhalten:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3 \cdot n + 2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Damit gilt die Gaußsche Formel für alle natürlichen Zahlen. Wir werden solche *Induktionsbeweise* noch öfter antreffen.

1 Zahlen

Tritt bei einer Multiplikation der gleiche Faktor mehrfach auf, so kürzt man das durch eine *Potenz* ab: 2^n bedeutet, dass die Zahl 2 n-mal als Faktor auftritt. Man überlegt sich sofort die folgenden Beziehungen:

$$m^{n_1} \cdot m^{n_2} = m^{n_1+n_2} \quad \frac{m^{n_1}}{m^{n_2}} = m^{n_1-n_2}.$$

Spezialfälle sind dann

$$\frac{m^n}{m^n} = m^0 = 1 \text{ und } m^1 = m.$$

Abschließend soll noch die Teilung der natürlichen Zahlen in *gerade* und *ungerade Zahlen* erwähnt werden: 0, 2, 4, 6, ... sind die *geraden*, 1, 3, 5, 7 ... sind die *ungeraden Zahlen*.

Hat man einen Ausdruck, in dem Addition und Multiplikation auftreten, dann geht man in folgender Weise vor:

- In einem Ausdruck mit konkreten Werten, wie beispielsweise $3 \cdot (4 + 5)$, wählt man den kürzesten Weg; man addiert zuerst die Zahlen in der Klammer und führt danach die Multiplikation aus:

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27.$$

- Treten mehrere Klammern auf, die Variable enthalten, multipliziert man jeden Wert der einen Klammer mit jedem der nächsten Klammer:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(x + 1) \cdot (x + 1) = x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 = x^2 + 2 \cdot x + 1.$$

Ein Minuszeichen vor der Klammer führt manchmal zu Fehlern. Diese vermeidet man, wenn man das Minuszeichen durch (-1) ersetzt und die Elemente in der Klammer mit (-1) multipliziert. $-(a + 3)$ wird dann zu $(-1) \cdot (a + 3) = -a - 3$, d.h. alle Vorzeichen in der Klammer verwandeln sich in ihr Gegenteil, und die Klammer kann weggelassen werden. Damit ist alles gesagt, was man über Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen wissen muss.

Ähnlich zu $\sum_{i=1}^n$ führt man ein Zeichen für die fortlaufende Multiplikation der Zahlen von 1 bis n ein:

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

1 Zahlen

Diese Operation hat den Namen *n* - *Fakultät*.

Die römischen Zahlen sind eine alte, aus der Antike stammende Darstellung der natürlichen Zahlen. Die Tabelle der römischen Zahlen zeigt, dass es sich hier um eine Mischung zwischen Zählen und Stellenwert handelt. Die Zahlen 1 bis 3 werden durch I, II und III dargestellt. Für die 5 führt man ein neues Symbol V ein. Der Strich links daneben (IV) führt zurück zur 4. Die Striche rechts von V (VI, VII und VIII) bedeuten, dass weiter gezählt wird bis zur 8, danach folgt X als Symbol für die Zahl 10, IX repräsentiert die Zahl 9; XI, XII und XIII stehen dann für 11, 12 und 13 usw. Weitere Symbole sind dann L (50), C (100), D (500) und M (1000). Auch hier verwendet man, falls nötig, die Subtraktion. Also steht etwa XC für 90 usw.

1.2 Teiler und Primzahlen

Hat man eine Zahl als Produkt von zwei kleineren Zahlen dargestellt ($n = n_1 \cdot n_2$), dann sind n_1 und n_2 *Teiler* von n . Bei manchen Zahlen gibt es nur eine einzige solche Darstellung, bei anderen gibt es mehrere Möglichkeiten. Beispielsweise gilt:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6,$$

wobei die Vertauschungen der Faktoren noch hinzukommt. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 sind Teiler von 24.

Die Zahl 19 besitzt nur die Teiler 1 und 19: $19 = 1 \cdot 19 = 19 \cdot 1$. 19 ist eine *Primzahl*. Teiler, die keine Primzahl sind, kann man weiter zerlegen, bis alle Faktoren Primzahlen sind:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Eindeutig ist diese Darstellung, wenn man die Primfaktoren der Größe nach ordnet.

Die Folge der Primzahlen beginnt mit 2. Das ist die einzige gerade Primzahl, alle anderen geraden Zahlen sind durch 2 teilbar. Eine interessante Erscheinung sind die *Primzahl-Zwillinge*. Das sind Paare von Primzahlen, die unmittelbar aufeinander folgen, wie zum Beispiel (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) usw.

1 Zahlen

Primzahlen sind am Anfang relativ häufig zu finden, später werden sie seltener:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, ...

Dass es immer neue Primzahlen geben muss, kann man sich wie folgt überlegen: hat man schon die Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ gefunden, dann definiert man die Zahl $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$. Diese Zahl ist durch keine der verwendeten Primzahlen teilbar. Da die Zerlegung in Primzahlen aber eindeutig ist, muss es eine Primzahl p_{n+1} geben, die größer als die verwendeten Primzahlen ist.

Wenn man eine natürliche Zahl n durch eine zweite Zahl p teilt, die kein Teiler von n ist, dann kommt man zur *Division mit Rest*.

Wir betrachten als einfachen Fall die Division von 34 durch 7: man zählt einfach die Vielfachen von 7 auf: 7, 14, 21, 28, 35. Die Zahl 34 liegt also zwischen $4 \cdot 7 = 28$ und $5 \cdot 7 = 35$. Man schreibt also

$$34 = 4 \cdot 7 + 6$$

Die Zahl 6 ist der *Divisionsrest*. Bei Division durch 7 liegt der Rest zwischen 0 und 6.

Verallgemeinert man das auf beliebige natürliche Zahlen a und b , dann gilt ganz allgemein:

Zu zwei natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q und r mit der Eigenschaft

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b. \quad (1.2)$$

Wir haben zwei neue mathematische Zeichen eingeführt. $\neq$ bedeutet *ungleich*; $\leq$ bedeutet *kleiner oder gleich*. Dass n ein Teiler von m ist, schreibt man wie folgt: $n \mid m$; wenn n kein Teiler von m ist, wird der senkrechte Strich durchgestrichen: $\nmid$.

Einige Eigenschaften der Teilbarkeit können dazu dienen, weitere Beweismethoden kennenzulernen. Dabei sind die folgenden Schritte typisch:

- Man überlegt sich einige Beispiele, die die zu beweisende Tatsache veranschaulichen und Ideen für den Beweis liefern können.
- Man schreibt, falls möglich, einen Beweis auf und überprüft ihn.

1 Zahlen

Ist das erfolgreich, dann gilt der Satz.

Allerdings sagt sich das sehr leicht. Es gibt Aussagen, bei denen man Jahrzehnte oder Jahrhunderte nach einem Beweis gesucht hat, und es gibt Beweise, die sich über Dutzende oder Hunderte von Seiten erstrecken.

- *Transitivität* der Teilbarkeitsrelation (von lateinisch **transitus** - der Übergang).

Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$. Es gilt beispielsweise $8|48$ und $48|96$, dann ist $8|96$.

Beweis. $a|b$ bedeutet, dass es eine natürliche Zahl n gibt mit $n \cdot a = b$. $b|c$ bedeutet, dass es eine natürliche Zahl k gibt mit $k \cdot b = c$. Daraus folgt: $c = k \cdot b = k \cdot n \cdot a$.

- Verträglichkeit der Teilbarkeits-Relation mit der Multiplikation.

Aus $a|b$ folgt $a \cdot c|b \cdot c$.

- Die Teilbarkeits-Relation in Verbindung mit der Addition.

Beispiel: $13|26$ und $13|52$, dann ist $13|78$.

Aus $a|b$ und $a|c$ folgt für beliebige natürliche Zahlen q und r , dass a ein Teiler von $(q \cdot b + r \cdot c)$ ist.

- Die Teilbarkeits-Relation ist *antisymmetrisch*. Aus $a|b$ und $b|a$ folgt $a = b$.

$a|b$ bedeutet, dass es eine Zahl n gibt mit $n \cdot a = b$. Entsprechend bedeutet $b|a$, dass eine natürliche Zahl k gibt mit $k \cdot b = a$. Diese Gleichung gilt nur für $n = k = 1$, also $a = b$.

Es gibt noch eine ganze Reihe von leicht verständlichen Teilbarkeitsregeln.

- Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar, d.h. jede Zahl, die auf 0, 2, 4, 6, 8 endet, ist durch 2 teilbar.
- Eine Zahl, die auf 0 oder 5 endet, ist durch 5 teilbar.
- Eine Zahl mit einer *Quersumme*, die durch 3 teilbar ist, ist selbst durch

1 Zahlen

3 teilbar. Die Quersumme ist die Summe der Ziffern, aus denen die Zahl besteht.

- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn sich nach Teilung durch 2 wieder eine gerade Zahl ergibt.
- Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn es sich um eine gerade Zahl mit der Quersumme 3 handelt

Algorithmus zur Primzahl-Darstellung natürlicher Zahlen.

- Gegeben sei eine Zahl n . Im ersten Schritt prüft man, ob n durch 2 teilbar ist. Ist das der Fall, dann ist $n = 2 \cdot n_1$. Man wiederholt diesen Schritt so lange, bis alle Faktoren 2 gefunden wurden. Beispielsweise ist $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, hier tritt also nur der Faktor 2 auf.
- Danach verwendet man alle Primzahlen $3, 5, 7, 11, \dots$, bis man die Zahl $\frac{n}{2}$ zum ersten Mal überschreitet. Weiter muss man nicht gehen, denn wenn ein Faktor $\geq \frac{n}{2}$ ist, dann ist der andere $\leq \frac{n}{2}$ und wurde bereits vorher gefunden.

Gegeben seien jetzt zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 . Für beide Zahlen schreiben wir die Menge aller Teiler auf. Sie enthält natürlich wenigstens die Zahl 1, Sind alle Teiler von n_1 und n_2 , die größer als 1 sind, voneinander verschieden, dann sind die beiden Zahlen *teilerfremd*. Haben die beiden Zahlen gemeinsame Teiler, die größer als 1 sind, dann ist die Frage nach dem *größten gemeinsamen Teiler* GGT interessant.

In der gleichen Weise betrachtet man alle Vielfachen von n_1 und n_2 . Jetzt sucht man nach gemeinsamen Vielfachen. Solche gemeinsamen Vielfachen existieren immer: $n_1 \cdot n_2$ ist das n_1 -fache von n_2 und das n_2 -fache von n_1 . Hier sucht man nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen KGV.

Sowohl das kleinste gemeinsame Vielfache als auch den größten gemeinsamen Teiler kann man in einfacher Weise mit Hilfe der Primzahl-Darstellung der beiden Zahlen bestimmen.

Beispiel: Es ist $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; die Zahl 120 hat die folgende Darstellung: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jetzt nimmt man für jede in *beiden* Darstellungen auftretende Zahl das Minimum und multipliziert diese miteinander. Das ergibt



Abbildung 1.3: Euklid von Alexandria (um 300 vor Chr.)

den größten gemeinsamen Teiler: $GGT(n_1, n_2) = 2 \cdot 3 = 6$. Wählt man für alle auftretende Primfaktoren das Maximum, dann erhält man das kleinste gemeinsame Vielfache: $KGV(n_1, n_2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

Historisch ist der *Euklidische Algorithmus* zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von großer Bedeutung. Das folgende Beispiel veranschaulicht den Euklidischen Algorithmus.

Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von 132 und 28.

- Schritt 1: $132 : 28 = 4$, Rest 20. Es ist also $132 = 4 \cdot 28 + 20$.
- Schritt 2: Nun teilt man 28 durch 20. Der Divisor aus Schritt 1 (28) wird also zum Dividenten und der vorige Rest (20) zum Divisor: $28 : 20 = 1$ Rest 8, $28 = 1 \cdot 20 + 8$.
- Schritt 3: $20 : 8 = 2 \cdot 8$ Rest 4, $20 = 2 \cdot 8 + 4$.
- In den folgenden Schritten wird das Prinzip aus Schritt 2 immer wieder angewendet: alter Divisor (20) wird neuer Divident, alter Rest (8) wird neuer Divisor. $8 = 2 \cdot 4 + 0$

1 Zahlen

- Letzter Schritt: Da die Reste immer kleiner werden, muss der Rest schließlich gleich null sein. Damit findet man den größten gemeinsamen Teiler. Es ist der Divisor in der letzten Rechnung, also der letzte Rest, der nicht 0 war.

Der Euklidische Algorithmus ergibt: $\text{GGT}(132,28) = 4$.

Kehren wir noch einmal zu den Primzahlen zurück. Ein einfacher Algorithmus zur Bestimmung von Primzahlen bis zu einem Maximalwert n war schon in der Antike bekannt. Es wird heute als *Sieb des Eratosthenes* bezeichnet, war aber schon lange vor ihm bekannt. Er hat nur den Namen „Sieb“ hinzugefügt. Er wurde zwischen 276 und 273 v. Chr. in Kyrene geboren und starb um 194 v. Chr. in Alexandria. Er betätigte sich als Mathematiker, Geograph, Astronom, Historiker, Philologe, Philosoph und Dichter. Im Auftrag der ägyptischen Könige aus der Dynastie der Ptolemäer leitete er rund ein halbes Jahrhundert lang die Bibliothek von Alexandria, die bedeutendste Bibliothek der Antike. Mit ihrer hervorragenden Ausstattung bot ihm die Bibliothek ausgezeichnete Arbeitsbedingungen. Berühmt ist er vor allem als Begründer der wissenschaftlichen Geographie. Seine auf sorgfältigen Messungen beruhende Bestimmung des Erdumfangs gehört zu den bekanntesten wissenschaftlichen Leistungen des Altertums.



Abbildung 1.4: Eratosthenes



Abbildung 1.5: Die antike Bibliothek

Zunächst werden alle Zahlen 2, 3, 4, ... bis zu einem frei wählbaren Maximalwert S aufgeschrieben. Die zunächst unmarkierten Zahlen sind potentielle Primzahlen. Die kleinste unmarkierte Zahl ist immer eine Primzahl.

Die nachstehenden Tabellen zeigen, wie die Primzahlen zwischen 2 und 76

1 Zahlen

ermittelt werden: Erst werden alle Vielfachen von 2 gestrichen, dann alle Vielfachen von 3, 5, und 7.

Die erste Tabelle entsteht dadurch, dass man die 1 und alle Vielfachen von 2 weglässt und 2 als Primzahl markiert.

-	-	2	3	-	5	-	7	-	9
-	11	-	13	-	15	-	17	-	19
-	21	-	23	-	25	-	27	-	39
-	41	-	43	-	45	-	47	-	49
-	51	-	53	-	55	-	57	-	59
-	61	-	63	-	65	-	67	-	69
-	71	-	73	-	75	-	-	-	-

Jetzt markiert man die 3 als Primzahl und streicht alle Vielfachen von 3.

	-	2	3	-	5	-	7	-	-
-	11	-	13	-	-	-	17	-	19
-	-	-	23	-	25	-	-	-	-
-	41	-	43	-	-	-	47	-	49
-	-	-	53	-	55	-	-	-	59
-	61	-	-	-	65	-	67	-	-
-	71	-	73	-	75	-	-	-	-

Man sieht, wie sich die Tabelle leert. Nun ist die 5 an der Reihe.

	-	2	3	-	5	-	7	-	-
-	11	-	13	-	-	-	17	-	19
-	-	-	23	-	-	-	-	-	-
-	41	-	43	-	-	-	47	-	49
-	-	-	53	-	-	-	-	-	59
-	61	-	-	-	-	-	67	-	-
-	71	-	73	-	-	-	-	-	-

Mit der 7 erreicht man das folgende Ergebnis:

1 Zahlen

	-	2	3	-	5	-	7	-	-
-	11	-	13	-	-	-	17	-	19
-	-	-	23	-	-	-	-	-	-
-	41	-	43	-	-	-	47	-	-
-	-	-	53	-	-	-	-	-	59
-	61	-	-	-	-	-	67	-	-
-	71	-	73	-	-	-	-	-	-

Die nächste Zahl ist ebenfalls eine Primzahl. Da $11 \cdot 11 = 121$ ist, kann man den Algorithmus an dieser Stelle beenden. Alle Zahlen, die jetzt noch in der Tabelle sind, können als Primzahlen markiert werden.

	-	2	3	-	5	-	7	-	-
-	11	-	13	-	-	-	17	-	19
-	-	-	23	-	-	-	-	-	-
-	41	-	43	-	-	-	47	-	-
-	-	-	53	-	-	-	-	-	59
-	61	-	-	-	-	-	67	-	-
-	71	-	73	-	-	-	-	-	-

Primzahlen waren über viele Jahrhunderte hinweg ein beliebter Forschungsgegenstand, und es wurden viele bemerkenswerte Eigenschaften entdeckt.

- *Fermatsche Primzahlen* besitzen die folgende Gestalt:

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Man erhält nacheinander $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$. Fermat vermutete, dass Zahlen dieser Form immer eine Primzahl sind. Diese Vermutung wurde von L. Euler widerlegt. Er zeigte, dass 641 ein Teiler von $F_5 = 4.294.967.297$ ist. Man vermutet inzwischen, dass es außer den ersten fünf keine weiteren Fermatschen Primzahlen gibt.

Die Namen von Pierre de Fermat und Leonhard Euler werden wir noch an vielen Stellen in der Mathematik wiederfinden. Auf Fermat geht beispielsweise die Vermutung zurück, dass die n-te Potenz einer positiven ganzen Zahl nicht in die Summe zweier ebensolcher Potenzen zerlegt werden kann, wenn n größer als 2 ist. Der *Große Fermatsche Satz* wurde im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat formuliert, aber erst 1994 von Andrew Wiles bewiesen.



Abbildung 1.6: Pierre de Fermat (1607-1665)



Abbildung 1.7: Leonhard Euler
(1707-1783)

- Mersennesche Zahlen haben ebenfalls mit Potenzen von 2 zu tun (M. Mersenne, 1588 - 1648). Sie haben die Form $2^p - 1$, wobei p eine Primzahl ist. Für die Primzahlen $p = 3, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 71, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 113, 127, 131, 137, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 527, 529, 533, 539, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 581, 587, 593, 599, 601, 607, 611, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 681, 683, 687, 689, 691, 697, 699, 701, 703, 707, 709, 713, 719, 721, 723, 727, 729, 731, 733, 737, 739, 743, 749, 751, 753, 757, 759, 761, 763, 767, 769, 771, 773, 777, 779, 781, 783, 787, 789, 791, 793, 797, 799, 801, 803, 807, 809, 811, 813, 817, 819, 821, 823, 827, 829, 831, 833, 837, 839, 841, 843, 847, 849, 851, 853, 857, 859, 861, 863, 867, 869, 871, 873, 877, 879, 881, 883, 887, 889, 891, 893, 897, 899, 901, 903, 907, 909, 911, 913, 917, 919, 921, 923, 927, 929, 931, 933, 937, 939, 941, 943, 947, 949, 951, 953, 957, 959, 961, 963, 967, 969, 971, 973, 977, 979, 981, 983, 987, 989, 991, 993, 997, 999$ ist das korrekt. Jedoch ist schon $M_{11} = 23 \cdot 89$ keine Primzahl. Die Zahl $2^{82 \cdot 589 \cdot 933} - 1$ ist die 95. Mersennesche Primzahl.
- Im Jahre 1742 teilte Christian von Goldbach Leonhard Euler die Vermutung mit, dass jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann. Beispielsweise ist $11 + 13 = 24$. Diese Vermutung konnte bisher weder widerlegt noch bewiesen werden.
- Polynome der Art

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

hängen ebenfalls mit den Primzahlen zusammen. L. Euler untersuchte das Polynom $H(x) = x^2 - x - 41$ und entdeckte, dass die 41 Werte $H(0), H(1), \dots, H(40)$ alle eine Primzahl sind.

- Drei Zahlen $\{p, p + 2, p + 4\}$ heißen Primzahl - Drillinge. Das Tripel $\{3, 5, 7\}$ ist das einzige Drillingspaar.

1 Zahlen

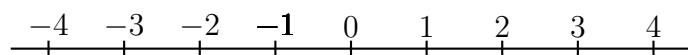


Abbildung 1.8: Der Zahlenstrahl mit negativen Zahlen

Zum Begriff der ganzen Zahl gelangt man, wenn man auch Bewegungen auf dem Zahlenstrahl nach links betrachtet (siehe Abbildung 1.8). Die Zahlen links von der Null bezeichnet man als *negative Zahlen*, die Zahlen rechts von der Null als *positive Zahlen*.

Bei der Multiplikation ganzer Zahlen muss man die Vorzeichen beachten.

- Haben beide Zahlen das gleiche Vorzeichen, ist das Ergebnis eine positive Zahl.
- Ist das Vorzeichen der beiden Zahlen voneinander verschieden, ist das Ergebnis eine negative Zahl.

1.3 Rationale Zahlen

Eine Verallgemeinerung der ganzen Zahlen führt uns zu den *rationalen Zahlen*. Sie sind uns aus dem Alltag wohl bekannt. Ein großes Stück Kuchen wird in 16 Stücke geteilt. Dann gibt man an, wie viele Stücke verkauft wurden, beispielsweise 5. Das drückt man aus durch die rationale Zahl $\frac{5}{16}$. Die Zahl 5 heißt *Zähler*, die Zahl 16 heißt *Nenner*. Als Zähler kommen alle ganzen Zahlen in Frage, der Nenner muss ungleich null sein.

Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus der Menge der negativen rationalen Zahlen, der Zahl Null und der Menge der positiven rationalen Zahlen.

Will man zwei rationale Zahlen, beispielsweise $a = \frac{4}{7}$ und $b = \frac{3}{9}$, addieren, müssen sie den gleichen Nenner besitzen, den *Hauptnenner*. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner, im Beispiel ist er gleich 63.

Um beide Brüche auf diesen gemeinsamen Nenner zu bringen, multipliziert man den ersten Bruch mit 9, den zweiten mit 7 und erhält $\frac{4 \cdot 9}{63} = \frac{36}{63}$ und

1 Zahlen

$\frac{3 \cdot 7}{63} = \frac{21}{63}$. Da jetzt der Nenner der beiden Brüche gleich ist, addiert man die Zähler und behält den Nenner bei. Das ergibt das Ergebnis $\frac{57}{63}$. Zähler und Nenner sind beide durch 3 teilbar, nach der Division durch 3 erhält man das Endergebnis $\frac{19}{21}$.

Das kann man nun auf beliebige rationale Zahlen $\frac{p_1}{p_2}$ und $\frac{q_1}{q_2}$ verallgemeinern. Dabei muss man sich gar nicht mit der Suche nach dem kleinsten Vielfachen aufhalten. Man multipliziert einfach die Nenner miteinander $p_2 \cdot q_2$ und den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des anderen Bruches, also $p_1 \cdot q_2$ und $q_1 \cdot q_2$.

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{p_1}{p_2} + \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2}{p_2 \cdot q_2}. \quad (1.3)$$

Bei der Subtraktion verfährt man genauso.

$$\frac{p_1}{p_2} - \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2}{p_2 \cdot q_2}. \quad (1.4)$$

Abschließend prüft man dann, ob man die Brüche noch kürzen kann.

Die Multiplikation von rationalen Zahlen definiert man in folgender Weise.

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_2 \cdot q_2}. \quad (1.5)$$

Die Division wird wie folgt definiert:

$$\frac{p_1}{p_2} : \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{p_2 \cdot q_1}. \quad (1.6)$$

Das kann man auch so ausdrücken: man bildet den *Kehrwert* des zweiten Bruches:

$$\frac{p_2}{q_2} \Rightarrow \frac{q_2}{p_2}. \quad (1.7)$$

Danach multipliziert man diese beiden Brüche.

Die ganzen Zahlen sind in den rationalen Zahlen enthalten. Jede rationale Zahl mit dem Nenner 1 entspricht einer ganzen Zahl.

Jeder rationalen Zahl lässt sich eine *Dezimalbruchentwicklung* zuordnen. Der Zahl $12 : 8$ entspricht die Dezimalzahl 1,5. Hier findet man nach dem Komma endlich viele Stellen vor. Bei der Division $1 : 3$ erhöht man als Ergebnis

1 Zahlen

0,3333..., die Zahl 3 wiederholt sich unendlich oft. Die Division $4 : 7$ ergibt eine längere Periode: $4 : 7 = 0,5714285\dots$. Die Periode hat hier eine Länge von 6. Rationale Zahlen haben immer eine endliche Periode.

Für die Stellen nach dem Komma wird die Basis 10 mit negativen Exponenten verwendet, beispielsweise ist

$$0,9876 = 9 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}.$$

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Man sollte noch beachten, dass in der englischen Kultur kein Dezimalkomma, sondern ein Dezimalpunkt verwendet wird.

1.4 Maßeinheiten

Das Internationale Einheitensystem ist das am weitesten verbreitete Einheitensystem für physikalische Größen.

Für das Messen von Längen ist *Meter* die Grundeinheit. Seine Definition hat sich über Jahrhunderte hinweg entwickelt. Es wurde ursprünglich 1799 als die Länge des *Urmeters* definiert, eines Prototyps aus Platin. Dessen Länge entsprach nach den damals durchgeführten Messungen dem 10.000.000-sten Teil der Entfernung vom Nordpol zum Äquator. Seit 1983 definiert man es als die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299\,792\,458$ Sekunden zurücklegt. Das Einheitenzeichen des Meters ist der Kleinbuchstabe **m**.

Die Maßeinheiten werden immer mit Potenzen von 10 umgerechnet:

- Millimeter: $1\text{ mm} = 0,1\text{ cm} = 0,01\text{ dm} = 0,001\text{ m}$,
- Zentimeter: $10\text{ mm} = 1\text{ cm} = 0,1\text{ dm} = 0,01\text{ m}$,
- Dezimeter: $100\text{ mm} = 10\text{ cm} = 1\text{ dm} = 0,1\text{ m}$,
- Meter: $1.000\text{ mm} = 100\text{ cm} = 10\text{ dm} = 1\text{ m} = 0,001\text{ km}$,

1 Zahlen



Abbildung 1.9: Das Urmeter

- Kilometer: $1.000.000 \text{ mm} = 100.000 \text{ cm} = 10.000 \text{ dm} = 1.000 \text{ m} = 1 \text{ km}$.

In der Technik und in der Physik wird auch die Maßeinheit „Millimeter“ unterteilt in *Mikrometer*, *Nanometer*, *Angström*, *Pikometer* und *Femtometer*.

Die englische Welt verwendet ganz andere Maßeinheiten, beispielsweise verwendet man die folgenden Längenmaße:

- 1 Zoll (inch - in) = 2,54 cm,
- 1 Fuß (foot - ft) = 12 Zoll = 30,48 cm,
- 1 yard (yd) = 3 Fuß = 91,44 cm,
- 1 furlong (fur) = 220 yards = 201,17 m,
- 1 Meile (mile - mi) = 1760 yards = 1609,344 m,
- 1 league (lea) = 3 miles = 4828,032 m.

Für alle mathematischen und physikalischen Begriffe hat man entsprechende Maßeinheiten definiert, mit denen man durch den Alltag vertraut ist:

- Die Grundeinheit für die Messung der Zeit ist die Sekunde. Vielfache der Einheit Sekunde sind eine Minute (1 min), eine Stunde (1 h), ein Tag (1 d) und ein Jahr (1 a): $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$, $1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 1\,440 \text{ min} = 86\,400 \text{ s}$, $1 \text{ a} = 365 \text{ d}$ oder 366 d (im Schaltjahr).

- Die Masse wird im wesentlichen durch Gramm (**g**), Kilogramm (**kg**) und Tonne (**t**) ausgedrückt: $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$, $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$.
- Die Temperatur ist eine physikalische Zustandsgröße aus der Thermodynamik. Sie wird mit einem Thermometer in Grad Kelvin (K) und Grad Celsius (C) gemessen. Im Alltag ist sie mit dem Gefühl von *warm* und *kalt* verbunden, die gemessene Temperatur kann sich aber erheblich von der gefühlten Temperatur unterscheiden. Die tiefste überhaupt mögliche Temperatur ist 0° K , gleichbedeutend mit $-273,15^\circ \text{ C}$. Sie heißt *Abso-luter Nullpunkt*.

Man muss beachten, dass man Maßeinheiten auch multiplizieren oder dividieren kann bzw. muss. Bei einem Quadrat von 10 cm Seitenlänge beträgt der Flächeninhalt $10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$. Eine Geschwindigkeit misst man in km/h oder in m/s.

1.5 Kongruenzen und Restklassen

Als nächstes betrachten wir die Division mit Rest: wir teilen b durch a und erhalten eine Zahl q so, dass $q \cdot a \leq b$ und $(q + 1) \cdot a > b$ ist. Die Differenz $m = b - q \cdot a$ bezeichnet man als *Divisionsrest*. Er liegt immer zwischen 0 und $a - 1$.

16	:	4	=	4	Rest = 0
17	:	4	=	4	Rest = 1
18	:	4	=	4	Rest = 2
19	:	4	=	4	Rest = 3

Nun fassen wir alle Zahlen zu einer Menge zusammen, die bei Division mit Rest durch eine feste Zahl a den gleichen Rest m lassen.

Verwendet man beispielsweise $m=2$, dann gibt es zwei Restklassen, die geraden und die ungeraden Zahlen:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{0, 2, 4, 6, \dots\}, \\ R_1 &= \{1, 3, 5, 7, \dots\}. \end{aligned}$$

1 Zahlen

Für beliebiges $k > 0$ erhält man k Restklassen:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{0, k, 2k, 3k, \dots\}, \\ R_1 &= \{1, k+1, 2k+1, 3k+1, \dots\}, \\ &\dots \\ R_{k-1} &= \{k-1, 2k-1, 3k-1, \dots\}. \end{aligned}$$

Eine Menge ganzer Zahlen $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ mit der Eigenschaft, dass die Vereinigung aller Restklassen $\{R_0(a_0), R_1(a_1), \dots, R_{k-1}(a_{k-1})\}$ die gesamte Menge $\mathbb{N}$ repräsentiert, nennt man ein *vollständiges Repräsentantensystem* von $\mathbb{N}$. Für jede Zahl k ist die Menge $\{0, 1, 2, \dots, k-2, k-1\}$ das einfachste und natürlichste Repräsentantensystem.

Lassen zwei Zahlen a und b bei Division durch m den gleichen Rest, so schreibt man $a \equiv b \pmod{m}$. Die Rechenregeln für Addition und Multiplikation lassen sich leicht auf die Restklassen übertragen.

- Aus $a \equiv b \pmod{m}$ folgt $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
- Aus $a \equiv b \pmod{m}$ folgt $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$.

Es gibt Gelegenheiten, wo bei ganzen Zahlen nur der Wert interessant ist. Man stellt sich das so vor: $-17 = (-1) \cdot 17$ und lässt den Faktor (-1) einfach weg. Die erhaltene positive Zahl heißt der *Betrag* von x und wird mit $|x|$ bezeichnet.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

1.6 Reelle und komplexe Zahlen

Es soll jetzt gezeigt werden, dass man mit den rationalen Zahlen nicht ausreicht; man führt *reelle Zahlen* ein. Die Wurzel einer gegebenen Zahl n ist die Zahl $\sqrt{n}$, für die gilt:

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n. \quad (1.9)$$

Als Beispiel soll bewiesen werden, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

1 Zahlen

- Wir gehen vom Gegenteil dessen aus, das bewiesen werden soll. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ rational ist, sich also als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, d.h. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wobei a und b keinen gemeinsamen Faktor enthalten sollen.
- Aus $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ folgt, dass $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ist. Also gilt $a^2 = 2 \cdot b^2$.
- a muss eine gerade Zahl sein; wäre a ungerade, so wäre auch a^2 ungerade. Dann würde links eine ungerade, rechts eine gerade Zahl stehen. Deshalb muss eine Zahl k existieren, die der Gleichung $a = 2 \cdot k$ genügt.
- Setzen wir nun $2 \cdot k$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir $(2 \cdot k)^2 = 2 \cdot b^2$. Daraus folgt $4 \cdot k^2 = 2 \cdot b^2$, also $2 \cdot k^2 = b^2$.
- Also muss auch b eine gerade Zahl sein. Demzufolge sind a und b beide durch 2 teilbar, im Widerspruch zu der am Anfang gemachten Voraussetzung. Also kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.

Man bezeichnet die reellen Zahlen durch $\mathbb{R}$. Wie bestimmt man nun den Wert von $\sqrt{2}$? Eine einfache Vorgehensweise besteht darin, dass man den Wert gewissermaßen einkreist. Man findet leicht $1,4 \cdot 1,4 = 1,96$, $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$. Also liegt der Wert in der Nähe von 1,4. $1,41 \cdot 1,41 = 1,9881$, $1,42 \cdot 1,42 = 2,0164$. Damit ist man schon ganz in der Nähe. Ein nächster Versuch gibt schon eine ausreichende Genauigkeit: $1,414 \cdot 1,414 = 1,999396$.

Taschenrechner und Computer liefern die benötigten Werte mit beliebiger Genauigkeit. Das Verhältnis zum Taschenrechner wird oft heiß diskutiert. Ältere Leute bestehen darauf, dass man die Grundrechenarten auch per Hand beherrschen muss, während junge Leute auch bei einfachen Aufgaben sofort zum Taschenrechner greifen. Wer gleich zum Taschenrechner greift, kann den nächsten Abschnitt einfach überspringen, aber vielleicht schadet es nicht, wenn man ihn liest. Auf jeden Fall muss man das Ergebnis in seiner Größenordnung durch einen Überschlag bestimmen, um gegen Fingerfehler gefeit zu sein.

- Die Addition der reellen Zahlen erfolgt nach dem gleichen Schema wie bei den natürlichen Zahlen. Sind Zahlen nach dem Komma vorhanden, füllen wir die Zahl mit der geringeren Stellenzahl nach dem Komma mit Nullen auf, so dass sie gleich lang sind.

1 Zahlen

	1. Zahl	3	6	8	4	,	2	3	4	5
+	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Übertrag	1	1	1	0		0	0	0	0
	Ergebnis	5	4	6	1	,	3	9	4	5

Der Übertrag ist gleich 0, wenn die Summe der beiden Ziffern kleiner als 10 ist; er ist gleich 1, wenn die Summe zwischen 10 und 18 liegt.

- Bei der Subtraktion zweier Zahlen sorgt man ebenfalls dafür, dass sie die gleiche Stellenzahl nach dem Komma besitzen. Außerdem kann man voraussetzen, dass die größere der beiden Zahlen positiv ist. Hat man beispielsweise $9 - 13$ zu rechnen, dann rechnet man $13 - 9$ und wechselt dann beim Ergebnis das Vorzeichen. Wir verwenden die gleichen Zahlen wie bei der Addition.

	1. Zahl	3	6	8	4	,	2	3	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis					,			4	5

Die beiden letzten Stellen sind unproblematisch: $5 - 0 = 5$, $4 - 0 = 4$. In der nächsten Stelle macht aber die Differenz $3 - 6$ Schwierigkeiten. Um die zu beheben, „borgt“ man sich 10 Einheiten von der vorherigen Stelle, also von der 2 und formuliert das Problem wie folgt:

	1. Zahl	3	6	8	4	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis					,			4	5

Jetzt ist $13 - 6 = 7$ und $1 - 1 = 0$.

	1. Zahl	3	6	8	4	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis					,	0	7	4	5

In der nächsten Stelle verfährt man in gleicher Weise mit der 4 und der 7 und erhält

	1. Zahl	3	6	7	14	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis					,	0	7	4	5

1 Zahlen

Damit ergibt sich

	1. Zahl	3	6	7	14	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis			0	7	,	0	7	4	5

In der nächsten Stelle verfährt man in gleicher Weise:

	1. Zahl	2	16	7	14	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis			0	7	,	0	7	4	5

Damit ergibt sich dann das Endergebnis:

	1. Zahl	2	16	7	14	,	1	13	4	5
-	2. Zahl	1	7	7	7	,	1	6	0	0
	Ergebnis	1	9	0	7	,	0	7	4	5

Als Probe kann man dann das Ergebnis und die zweite Zahl addieren und erhält die erste Zahl.

- Die Multiplikation bereitet keine Schwierigkeiten; man schreibt die beiden Zahlen nebeneinander, getrennt durch das Multiplikationszeichen. Es ist bequem, die Zahl mit der geringeren Stellenzahl auf die rechte Seite zu schreiben, dann entstehen bei der Multiplikation weniger Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & , & 4 & 5 & 6 & \cdot & 2 & 7 & , & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Man multipliziert jetzt die Zahl auf der linken Seite zuerst mit der 2. Immer wenn der Wert ≥ 10 ist, wird der Übertrag nach links weitergeschoben; er kann jetzt natürlich größer als 1 sein. Somit erhält man die folgende erste Zeile:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & , & 4 & 5 & 6 & \cdot & 2 & 7 & , & 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 6 & & 9 & 1 & 2 & & & & & & \end{array}$$

Als nächstes geht man eine Stelle nach rechts und verwendet die 7. Bei der 7 handelt es sich nur noch um Einer, also geht man im Rechenschema auch eine Stelle nach rechts und erhält

1 Zahlen

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 3 \ , \ 4 \ 5 \ 6 \cdot 2 \ 7 \ , \ 3 \ 1 \\
 \hline
 2 \ 4 \ 6 \quad 9 \ 1 \ 2 \\
 8 \ 6 \quad 4 \ 1 \ 9 \ 2
 \end{array}$$

Mit den nächsten Ziffern verfährt man in gleicher Weise und erhält

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 3 \ , \ 4 \ 5 \ 6 \cdot 2 \ 7 \ , \ 3 \ 1 \\
 \hline
 2 \ 4 \ 6 \quad 9 \ 1 \ 2 \\
 8 \ 6 \quad 4 \ 1 \ 9 \ 2 \\
 3 \quad 7 \ 0 \ 3 \ 6 \ 8 \\
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6
 \end{array}$$

Nun werden die Spalten addiert. Für das Endergebnis ist wichtig, dass sich die Stellenzahl der beiden Zahlen addiert, dass also fünf Stellen nach dem Komma auftreten. Für $123,456 \cdot 27,31$ entsteht folgendes Schema:

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 3 \ , \ 4 \ 5 \ 6 \cdot 2 \ 7 \ 3 \ 1 \\
 \hline
 2 \ 4 \ 6 \ 9 \ 1 \ 2 \\
 8 \ 6 \ 4 \ 1 \ 9 \ 2 \\
 3 \ 7 \ 0 \ 3 \ 6 \ 8 \\
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \hline
 3 \ 3 \ 7 \ 1 \ 5 \ 8 \ 3 \ 3 \ 6
 \end{array}$$

Das Endergebnis ist gleich $3371,58336$.

- Es bleibt noch die Division übrig. Wir verwenden die gleichen Zahlen und berechnen $123,456 : 27,31$. Es ist günstig, wenn beide Zahlen die gleiche Anzahl von Stellen nach dem Komma besitzen. Also berechnet man $123,456 : 27,310$.

$$1 \ 2 \ 3 \ , \ 4 \ 5 \ 6 : 2 \ 7 \ , \ 3 \ 1 \ 0$$

Man beginnt versuchsweise mit der 4, da $4 \cdot 30 = 120$ in der Nähe der $123,456$ liegt. Man multipliziert die 4 stellengerecht mit $27,310$. Es entsteht

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 3 \ , \ 4 \ 5 \ 6 : 2 \ 7 \ , \ 3 \ 1 \ 0 = 4 \\
 1 \ 0 \ 9 \ , \ 2 \ 4 \ 0
 \end{array}$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile entsteht

1 Zahlen

$$\begin{array}{r}
 1\ 2\ 3\ ,\ 4\ 5\ 6\ : 2\ 7\ ,\ 3\ 1\ 0\ =\ 4 \\
 1\ 0\ 9\ ,\ 2\ 4\ 0 \\
 \hline
 1\ 4\ ,\ 2\ 1\ 6
 \end{array}$$

Man verschiebt das Komma um eine Stelle nach rechts und teilt 142,16 durch 27,31 und erhält 5 und den Rest 5,61. Als Zwischenergebnis bedeutet das

$$142,16 : 27,31 = 4,5 \quad \text{Rest } 5,61.$$

Die nächste ist dann gleich 2 mit dem Rest 1,48. Das kann man beliebig lange forsetzen. Mit einiger Ausdauer erhält man das Ergebnis 4,5205419260344196. Da empfindet man den Taschenrechner schon als sehr angenehme Hilfe.

Eine Verallgemeinerung der Quadratwurzel ist die n -te Wurzel $\sqrt[n]{a}$. Gilt $x^n = a$, dann ist $x = \sqrt[n]{a}$. Die für die rationalen Zahlen festgestellten Eigenschaften der Addition und Multiplikation (Kommutativität, Assoziativität und Transitivität) behalten ihre Gültigkeit.

Wenden wir uns nun den *komplexen Zahlen* zu. Aus negativen Zahlen kann man keine Wurzeln ziehen, da das Quadrat zweier ganzer Zahlen immer positiv ist. Um das Problem zu beheben, muss man den Zahlenbereich noch einmal erweitern.

Wir betrachten $\sqrt{-4}$ und zerlegen -4 in $(-1) \cdot 4$. Damit ergibt sich für $\sqrt{-4}$ der Wert $\sqrt{-1} \cdot 2$. Wir setzen $i = \sqrt{-1}$, womit $i^2 = -1$ gilt. Jede komplexe Zahl $z = a + ib$ besteht aus einem *Realteil* $\Re(z) = a$ und einem *Imaginärteil* $\Im(z) = b$. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Dabei können a und b beliebige reelle Zahlen sein. Die komplexen Zahlen kann man sich in einem x, y -Koordinatensystem veranschaulichen, der *Gaußschen* oder *komplexen Zahlenebene*. Auf der x -Achse wird der Realteil abgetragen, sie wird als *reelle Achse* bezeichnet. Auf der y -Achse wird der Imaginärteil abgetragen, sie heißt dementsprechend *imaginäre Achse*.

Am einfachsten ist die Definition von Addition und Subtraktion:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + (b \pm d). \quad (1.10)$$

Die Multiplikation realisiert man durch Ausmultiplizieren der beiden Klammern.

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (1.11)$$

1 Zahlen

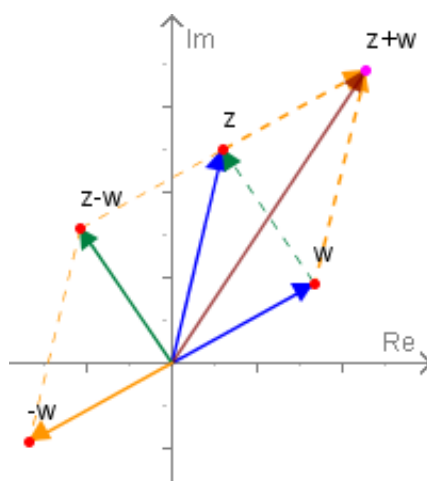


Abbildung 1.10: Die Gaußsche Zahlenebene

Das Produkt $-bd$ ergibt sich durch $i^2 = -1$.

Für die Division benötigt man die zu $z = (a + ib)$ *konjugiert komplexe Zahl* $\bar{z} = (a - ib)$. Das Produkt $(a + ib) \cdot (a - ib) = (a^2 + b^2)$ ergibt eine reelle Zahl. Um $\frac{(a+ib)}{(c+id)}$ zu berechnen, erweitert man den Bruch mit $(c+id)$ und erhält $\frac{(a+ib)}{(c+id)} \cdot \frac{(c+id)}{(c+id)}$. Damit ergibt sich für die Division

$$\frac{(a + ib)}{(c + id)} = \frac{(ac - bd) + i(ad + bc)}{c^2 + d^2}. \quad (1.12)$$

Beispiel:

$$\frac{(5 + 3i)}{(4 + 2i)} = \frac{(20 + 6) + (12 - 10)i}{4^2 + 2^2} = \frac{26 + 2i}{20} = \frac{13}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Es gibt noch viele weitere interessante Zahlenmengen und Zahlenfolgen.

Eine solche Gruppe sind die *Binomialkoeffizienten*. Sie werden für natürliche Zahlen $n > 0$ in folgender Weise definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!} \quad (1.13)$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann. Beim

1 Zahlen

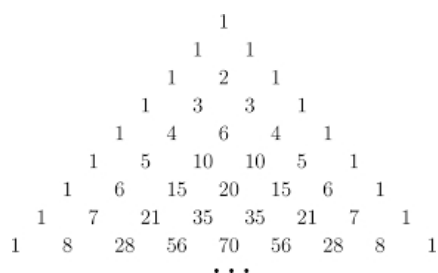


Abbildung 1.11: Das Pascalsche Dreieck

Lotto „6 aus 49“ sind 49 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 49 vorhanden, sechs Kugeln bestimmen die Gewinnzahlen. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!}.$$

Das sind immerhin 622.614.630 Möglichkeiten.

Eine leicht verständliche Darstellung und Berechnungsmöglichkeit wird durch das *Pascalsche Dreieck* gegeben:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \quad (1.14)$$

Das Pascalsche Dreieck entsteht auch, wenn man die Potenzen von $x + 1$ betrachtet. $x^0 = 1$. Das wird dargestellt durch die 1 an der Spitze des Dreiecks. $(x + 1)^1 = \underline{1} \cdot x + \underline{1} \cdot 1$. $(x + 1)^2 = \underline{1} \cdot x^2 + \underline{2} \cdot x + \underline{1} \cdot 1$. Die 2 in der Mitte ist die Summe der beiden Einsen in der vorhergehenden Zeile. In dieser Weise setzt sich das fort: $(x + 1)^3 = \underline{1} \cdot x^3 + \underline{3} \cdot x^2 + \underline{3} \cdot x + \underline{1} \cdot 1$. Die beiden Dreien sind wieder die Summe der Zahlen in der vorhergehenden Zeile.

Die beiden äußeren Diagonalen enthalten nur Einsen, die darauf folgenden Diagonalen enthalten die natürlichen Zahlen. In der dritten Diagonale erhöht sich der Wert von Zeile zu Zeile um 1 ($2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \dots$). Die Zeilensummen verdoppeln sich von oben nach unten.

Für viele Anwendungen in der Kunst und in der Architektur ist die *Fibonacci - Folge* von Bedeutung. Benannt ist die Folge nach Leonardo Fibonacci, der damit im Jahr 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb. Die Folge war aber schon in der Antike sowohl den Griechen als auch den Indern



Abbildung 1.12: Blaise Pascal (1623-1662)

bekannt. Sie beginnt mit 1, 1; jede nächste Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... Wie von Johannes Kepler festgestellt wurde, kommen die Quotienten F_{n+1}/F_n zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dem Goldenen Schnitt

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$

nahe.

Eine *geometrische Folge* ist in der Mathematik eine regelmäßige Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Sie wird vor allem in der Finanzwelt angewendet. Man beginnt mit einem Anfangswert K_0 und verwendet zur Berechnung des nächsten Wertes die Vorschrift

$$K_i = K_0 \cdot q^i, \quad (1.15)$$

wobei q ein vorgegebener Wert ist und man mit K_0 beginnt. Dann erhält man nacheinander $K_1, K_2 \dots$

Beginnt man mit einem Kapital von 1000 € und einem Zinssatz von 3 %, was einem Wert von 0,03 für q entspricht, dann erhält man die folgende Reihe von erhöhtem Kapital:

$$1000 \Rightarrow 1030 \Rightarrow 1060,90 \Rightarrow 1092,73 \Rightarrow 1125,51 \Rightarrow 1159,27 \dots$$

1 Zahlen

Speziell bei der Berechnung von Zinsen ergibt sich ein neues Problem. In der Finanzwirtschaft werden am Ende einer Rechnung nur zwei Stellen benötigt. Ein Zwischenergebnis 1125,508881 wird *aufgerundet* auf 1125,51; wäre das Zwischenergebnis gleich 1125,504881, würde man *abrunden* auf 1125,50.

Am Ende der Behandlung der unterschiedlichen Zahlensysteme kehren wir noch einmal zum Dualsystem zurück. Die binären Werte 0 und 1 (*Bits = binary digits*) werden in Gruppen von acht Bits (Bytes) abgespeichert. Um diese Bytes leichter lesen zu können, fasst man vier Bits zu einer Tetrade zusammen und ordnet ihnen einen Zahlenwert zu; man kann mit vier Bits die Zahlen von 0 bis 15 darstellen; deshalb verwendet man die Buchstaben *A, B, C, D, E, F* als Abkürzungen für die Zahlen von 10 bis 15. Verwendet man sowohl Dezimal- als auch Hexadezimalzahlen, verwendet man bei den Hexadezimalzahlen einen Index; man schreibt etwa 73_{16} , und das bedeutet die Bitfolge 0111 0011 ($0111 = 7, 0011 = 3$).

Um den im Computer darstellbaren Zahlenbereich zu erweitern und insbesondere sehr große und sehr kleine Zahlen darzustellen, verwendet man *Gleitkommazahlen*.

Beispiel. Ein häufiges Darstellungsformat für die Anzeige von Zahlen auf wissenschaftlichen Taschenrechnern ist die Basis 10, mit den Ziffern 0 bis 9, eine Mantisse mit zehn Stellen, wobei eine Stelle vor dem Komma steht. Die Exponenten liegen zwischen -99 und $+99$. Die Zahl mit der Darstellung $v = 1, m = 9,460.730.5, e = 15$ hat damit den Wert $9,460.730.5 \cdot 10^{15}$.

Die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl in diesem Darstellungsformat ist $0,000.000.0 \cdot 10^{-99}$, also 0, die größte darstellbare Zahl ist $9,999.999.9 \cdot 10^{99}$, das ist eine 100-stellige Zahl.

Noch ein kleiner Seitensprung in die englische Darstellung großer Zahlen. Die englische Sprache kennt die Zahlen Milliarden, Billiarden, Trilliarden . . . nicht. Sehr oft werden Zahlen aus englisch-sprachigen Medien übernommen, und man weiß als Leser nicht, ob sie nur übernommen wurden oder korrekt übersetzt sind.

Und natürlich haben andere Sprachen und Kulturen auch ihre eigenen Zahlen.

1 Zahlen

Zahlbezeichnung	Deutsch	US-Englisch
100	Hundert	hundred
1 000	Tausend	thousand
1 000 000	Million	million
1 000 000 000	Milliarde	billion
1 000 000 000 000	Billion	trillion
1 000 000 000 000 000	Billiarde	quadrillion

Tabelle 1.1: Große englische und deutsche Zahlen



Abbildung 1.13: Chinesische Zahlen



Abbildung 1.14: Japanische Zahlen

2 Mengenlehre und Logik

2.1 Aussagenlogik

In der Mathematik trifft man sehr oft auf die Eigenschaften **richtig**, **wahr**, **true** oder **falsch**, **false**. Im 19. Jahrhundert stellte der englische Mathematiker George Boole (1815 - 1864) die Frage, ob man nicht die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen oder Aussagenverbindungen berechenbar machen kann. Er stellte fest, dass die Wiederholung einer Aussage an deren Wahrheit oder Falschheit nichts ändert. Den Wahrheitswert bezeichnete er mit x , und für die Wiederholung verwendete er die Multiplikation: $x \cdot x = x$. Diese Gleichung hat nur die beiden Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. Daraus zog er den Schluss, dass eine solche Berechenbarkeit mit zwei Werten auskommen muss.

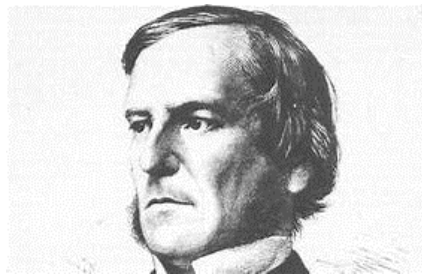


Abbildung 2.1: George Boole (1815 - 1864)

Den Umgang mit logischen Operationen kann man schrittweise aufbauen.

1. Man verwendet die beiden Wahrheitswerte **wahr** (1, **true**) und **falsch** (0, **false**). Jede verwendete Aussage $P(x)$ muss es erlauben, ihr für alle zur Diskussion stehenden Elemente x genau einen dieser beiden Werte zuzuordnen.
2. Die *Negation* einer logischen Variablen x mit der sprachlichen Form

2 Mengenlehre und Logik

„nicht x “ und dargestellt durch $\bar{x}$, überführt die beiden Werte ineinander:

$$\bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0. \quad (2.1)$$

3. Die *Disjunktion* $x \vee y$ mit dem sprachlichen Ausdruck „ x oder y “ ist wahr, wenn x oder y oder beide wahr sind, sie ist nur falsch, wenn sowohl x als auch y falsch sind.
4. Die *Konjunktion* $x \wedge y$ mit der sprachlichen Form „ x und y “ ist wahr, wenn sowohl x als auch y wahr sind.
5. Die *Antivalenz* $x \oplus y$ ist dann wahr, wenn x und y unterschiedliche Werte annehmen. Das entspricht dem Sprachgebrauch „entweder ... oder“. Man beachte den Unterschied zur Disjunktion.
6. Die *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ ist dann wahr, wenn x und y den gleichen Wert annehmen, wenn also beide wahr oder beide falsch sind. Das entspricht dem Sprachgebrauch „genau dann ... wenn“.
7. Eine besondere Bedeutung für die Mathematik besitzt die *Implikation* $x \Rightarrow y$. Man sagt: *wenn* x wahr ist, *dann* muss auch y wahr sein. x bezeichnet man als *Voraussetzung* oder *Prämisse*, y als *Schlussfolgerung* oder *Konklusion*. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn die Prämisse wahr und die Schlussfolgerung falsch ist. Oft bezeichnet man Implikationen als *Regeln*. Ist in einem bestimmten Zusammenhang die Prämisse falsch, dann kann man die Regel nicht anwenden, ihre Gültigkeit wird aber dadurch nicht in Frage gestellt. In allen Bereichen unseres Lebens findet man eine Vielzahl solcher Regeln.
8. Man kann die Implikation durch Negation und Disjunktion ersetzen:

$$(x \Rightarrow y) = (\bar{x} \vee y). \quad (2.2)$$

9. Falls die Implikation für zwei Aussagen x und y in beiden Richtungen zutrifft, sind diese beiden Aussagen äquivalent.

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (x \Leftrightarrow y). \quad (2.3)$$

10. Mit der folgenden Gleichung werden *indirekte Beweise* beschrieben

$$(x \Rightarrow y) = (\bar{y} \Rightarrow \bar{x}). \quad (2.4)$$

2 Mengenlehre und Logik

Man nimmt das Gegenteil der Schlussfolgerung an und leitet daraus einen Widerspruch zur ursprünglichen Voraussetzung ab. Man erinnere sich noch einmal an den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$.

11. *Modus ponens, Abtrennungsregel*: Wenn die Prämisse x wahr ist und die Implikation $x \Rightarrow y$ gilt, dann gilt auch die Konklusion y :

$$x \wedge (x \Rightarrow y) = xy. \quad (2.5)$$

$$\bar{y} \wedge (x \Rightarrow y) = \bar{x}\bar{y}. \quad (2.6)$$

12. Schließlich erwähnen wir noch den *Kettenschluss*, bei dem aus einer Prämisse x über mehrere Regeln hinweg eine bestimmte Konklusion hergeleitet wird. Der einfachste Fall sieht so aus:

$$((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z). \quad (2.7)$$

Man kämpft sich sozusagen schrittweise an die abschließende Konklusion heran.

13. Es gilt stets eine Aussage oder ihre Negation, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht (**tertium non datur**).

$$(x \vee \bar{x}) = 1. \quad (2.8)$$

14. Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch: Eine Aussage und ihre Verneinung können nicht gleichzeitig gelten.

$$(x \wedge \bar{x}) = 0. \quad (2.9)$$

Die Definition der Funktionen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Die Gesetze der Aussagenlogik beweist man fast immer durch Tabellen. Diese Tabellen haben n Spalten, wenn n die Anzahl der Variablen ist, und 2^n Zeilen. Diese Anzahl ergibt sich, wenn man alle möglichen Wertekombinationen aufzählt. Hier sollen die wichtigsten Gesetze usammengestellt werden.

- Die Gesetze von de Morgan:

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \quad \text{Gesetze von de Morgan.} \quad (2.10)$$

2 Mengenlehre und Logik

		Konjunktion	Disjunktion	Antivalenz	Äquivalenz	Implikation
x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \Rightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Tabelle 2.1: Die Funktionen der Aussagenlogik

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{x \wedge y}$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \wedge y}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0

Tabelle 2.2: Der Beweis der Gesetze von de Morgan durch eine Tabelle

- Die *Assoziativität* von $\wedge$ und $\vee$:

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z). \quad (2.11)$$

- Die *Kommutativität* von $\wedge$ und $\vee$:

$$x \wedge y = y \wedge x \quad x \vee y = y \vee x. \quad (2.12)$$

- Das *Distributivgesetz* für $\wedge$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (2.13)$$

- Das *Distributivgesetz* für $\vee$:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (2.14)$$

- Die *Idempotenzgesetze*:

$$x \wedge x = x \quad x \vee x = x. \quad (2.15)$$

- Die doppelte Negation:

$$\overline{\overline{x}} = x. \quad (2.16)$$

2 Mengenlehre und Logik

- Der ausgeschlossene Widerspruch:

$$x \wedge \bar{x} = 0. \quad (2.17)$$

- Das ausgeschlossene Dritte:

$$x \vee \bar{x} = 1. \quad (2.18)$$

Für die Äquivalenz und die Antivalenz kann man ähnliche Regeln finden, wir begnügen uns aber damit, beide Operationen durch Konjunktion und Disjunktion auszudrücken.

$$x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y \quad (2.19)$$

$$x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy. \quad (2.20)$$

Das Zeichen $\wedge$ wird oft weggelassen, um die Ausdrücke lesbarer zu machen.

Man darf sich durch diese Menge an Zusammenhängen nicht verwirren lassen. Sie werden immer dann noch einmal erläutert, wenn sie angewendet werden.

2.2 Mengen

Im Jahr 1895 entwarf der russische Mathematiker Georg Cantor eine Beschreibung des Begriffs *Menge*, die noch heute als Definition dient: unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Mengen können sowohl *endlich* als auch *unendlich* sein. Die Menge der Schüler einer Klasse ist eine endliche Menge, die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind unendliche Mengen. Es gibt auch eine Menge, die kein Element enthält. Sie wird als *leere Menge* $\emptyset$ bezeichnet.

Die Elemente einer kleinen Menge werden hinter dem Gleichzeichen in geschweiften Klammern aufgezählt:

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k\}.$$

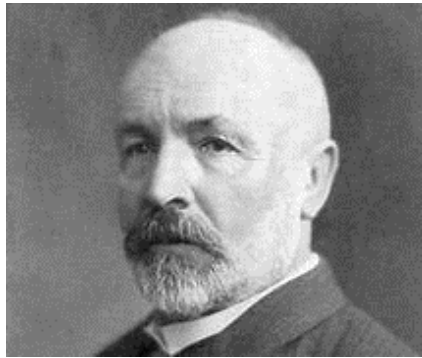


Abbildung 2.2: Georg Cantor (1845 - 1918)

Man kann auch in der Klammer die Eigenschaft angeben, die die Elemente einer Menge besitzen müssen:

$$M = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } p(x)\}.$$

Gehört ein Element x zur Menge M , dann schreibt man $x \in M$, anderenfalls $x \notin M$. Die *Mächtigkeit* einer Menge entspricht bei endlichen Mengen der Anzahl der Elemente der Menge und wird symbolisch durch $|M|$ dargestellt. Es wird im weiteren vorausgesetzt, dass alle Mengen, die verwendet werden, innerhalb einer großen Menge $\mathbb{U}$ liegen, die gewissermaßen einen Rahmen bildet, innerhalb dessen sich alles abspielt.

1. Eine Menge A ist eine *Teilmenge* oder *Untermenge* der Menge B , wenn jedes Element der Menge A ein Element der Menge B ist, die Menge B ist dann eine *Obermenge* der Menge A . Man schreibt $A \subset B$. Können die Mengen A und B auch gleich sein, dann schreibt man $A \subseteq B$. Umgekehrt schreibt man

$$B \supset A \quad \text{oder} \quad B \supseteq A.$$

Wichtige Zahlenmengen, die in der Mathematik eine grundlegende Rolle spielen, wurden schon vorgestellt:

- die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$,
- die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$,
- die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$,

2 Mengenlehre und Logik

- die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$,
- die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Diese Mengen wurden definiert, weil man die Möglichkeiten des jeweiligen Zahlenbereiches erweitern wollte. Die Teilmengenrelation ist hier ganz augenfällig:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Jetzt sollen der Reihe nach die Operationen mit Mengen vorgestellt werden. Die Operationen mit Mengen lassen sich anschaulich durch sogenannte *Venn-Diagramme* veranschaulichen. Die Mengen werden durch Flächen dargestellt, und ihre Färbung stellt dann die entsprechende Operation dar.

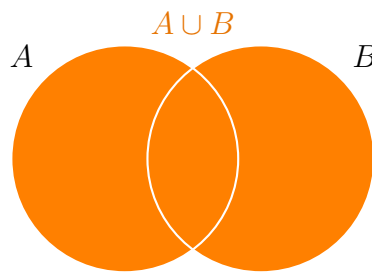


Abbildung 2.3: Vereinigung $A \cup B$ von zwei Mengen

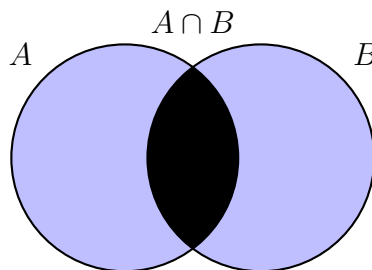


Abbildung 2.4: Durchschnitt $A \cap B$ von zwei Mengen

2. Das *Komplement* einer Menge $M \subset \mathbb{U}$ ist die Menge

$$\overline{M} = \{x | x \in \mathbb{U}, x \notin M\}. \quad (2.21)$$

2 Mengenlehre und Logik

Verwendet man das Komplement zweimal, so erhält man die ursprüngliche Menge zurück:

$$\overline{\overline{X}} = X. \quad (2.22)$$

Die Menge X und die Menge $\overline{X}$ enthalten keine gemeinsamen Elemente:

$$\overline{X} \cap X = \emptyset. \quad (2.23)$$

Gemeinsam ergeben sie die Menge $\mathbb{U}$:

$$X \cup \overline{X} = \mathbb{U}. \quad (2.24)$$

3. Die *Vereinigung* von zwei Mengen A und B enthält alle Elemente, die in der Menge A oder der Menge B oder in beiden enthalten sind:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}. \quad (2.25)$$

Hier verwendet man das Wort „oder“ im einschließenden Sinne.

4. Der *Durchschnitt* von zwei Mengen A und B enthält alle Elemente, die sowohl Element von A als auch Element von B sind:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}. \quad (2.26)$$

5. Die *Differenz* der Mengen entfernt alle Elemente aus der Menge A , die Element von B sind:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}. \quad (2.27)$$

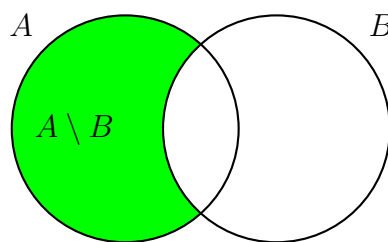


Abbildung 2.5: Differenz $A \setminus B$ von zwei Mengen

Diese Differenz ist nicht sehr wichtig, weil man $A \setminus B$ durch $A \cap \overline{B}$ ersetzen kann.

2 Mengenlehre und Logik

6. Die Produktmenge $A \times B$ enthält alle Paare (a, b) , für die $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}. \quad (2.28)$$

Beispielsweise kann man die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ als Produkt der beiden Mengen $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ auffassen.

7. Die *Symmetrische Differenz* $A \triangle B$ enthält alle Elemente, die nur in einer der beiden Mengen liegen.

$$A \triangle B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B \text{ oder } x \notin A \text{ und } x \in B\}. \quad (2.29)$$

Es gilt:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B). \quad (2.30)$$

Das Operationszeichen $\cap$ wird häufig weggelassen, man schreibt einfach

$$A \triangle B = (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B). \quad (2.31)$$

8. Die *Äquivalenz* $A \Leftrightarrow B$ wählt alle Elemente aus, die in beiden Mengen liegen oder in keiner von beiden:

$$A \Leftrightarrow B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}). \quad (2.32)$$

Das Ergebnis von Operationen mit Mengen sind wieder Mengen, deshalb kann man diese Operationen in vielfacher Weise miteinander kombinieren. Dabei angewendete Regeln werden wir dann diskutieren, wenn sie angewendet werden. Die Operationen mit Mengen und die Operationen der Logik lassen sich direkt aufeinander abbilden. Dazu ordnet man einer Menge von n Elementen einen binären Vektor mit n Positionen zu. Ist ein Element in der Menge enthalten, dann trägt man an der entsprechenden Position den Wert 1 ein, ist es nicht enthalten, dann trägt man den Wert 0 ein.

Beispiel: Es sei $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Dann ordnet dieser Menge einen sechsstelligen Binärvektor $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ zu.

Zur Menge $N = \{e_1, e_3, e_4\}$ gehört dann der Binärvektor $B = \{1, 0, 1, 1, 0, 0\}$. Die Mengenoperationen Komplement, Durchschnitt und Vereinigung lassen

2 Mengenlehre und Logik

sich leicht mit den Binärvektoren realisieren, indem man die Operationen komponentenweise anwendet.

$$\overline{X} \Leftrightarrow 1 - x \quad (2.33)$$

$$X \cap Y \Leftrightarrow x \wedge y \quad (2.34)$$

$$X \cup Y \Leftrightarrow x \vee y. \quad (2.35)$$

Wir verwenden noch einmal

$$M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \quad \text{und} \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}.$$

Es sei $A = \{e_1, e_3, e_5\}$ mit dem zugehörigen Binärvektor $b = \{1, 0, 1, 0, 1, 0\}$, $C = \{e_1, e_4, e_5\}$ mit dem zugehörigen Binärvektor $c = \{1, 0, 0, 1, 1, 0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{0, 1, 0, 1, 0, 1\}, \\ A \cap C &= \{1, 0, 0, 0, 1, 0\}, \\ A \cup C &= \{1, 0, 1, 1, 1, 0\}. \end{aligned}$$

Die logischen Operationen lassen sich auch arithmetisch ausdrücken.

$$\overline{x} = 1 - x, \quad (2.36)$$

$$x \wedge y = x \cdot y, \quad (2.37)$$

$$x \vee y = x + y - x \cdot y. \quad (2.38)$$

Besonders angemerkt: der Vektor, der nur den Wert 1 enthält, beschreibt die gesamte betrachtete Menge, der Vektor, der nur den Wert 0 enthält beschreibt die *leere Menge*. Jeder Vektor, der Nullen und Einsen enthält, beschreibt Teilmengen. Die Menge aller Teilmengen einer Menge $\mathbb{M}$ heißt die Potenzmenge von $\mathbb{M}$. Sie wird durch $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ bezeichnet:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \{X | X \subseteq \mathbb{M}\}. \quad (2.39)$$

Mit Hilfe der Darstellung durch Binärvektoren überlegt man sich schnell, dass $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ 2^n Elemente enthält. Jede der n Positionen kann zwei Werte besitzen, also sind das über den ganzen Vektor hinweg 2^n Möglichkeiten. Für eine Menge mit wenig Elementen kann man die Potenzmenge durch ein Hasse-Diagramm darstellen (siehe Abbildung 2.6).

Der von Georg Cantor stammenden Begriff der *Mächtigkeit* einer Menge verallgemeinert den Begriff der Anzahl von Elementen, der bei endlichen Mengen verwendet wird. Der erste Schritt über endliche Mengen hinaus sind die

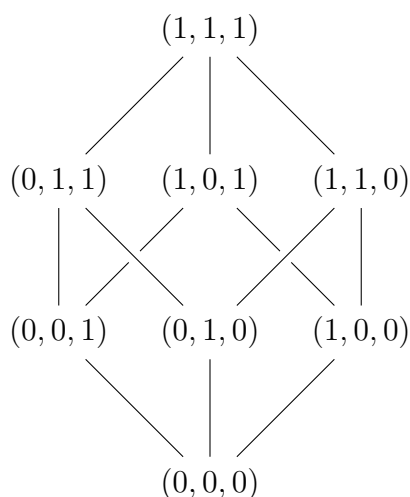


Abbildung 2.6: Ein Hasse-Diagramm für die Menge $\{a, b, c\}$

abzählbaren Mengen. Der Prototyp hierfür ist natürlich die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Es erscheint seltsam, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ genau so viele Elemente enthält, obwohl es doch eigentlich doppelt so viele sein müssten. Man kann die Menge der ganzen Zahlen ganz einfach abzählen, indem man sie anders schreibt: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Auf diese Weise wird jeder ganzen Zahl in der Reihe der natürlichen Zahlen ein Platz zugewiesen. Man sagt, dass die beiden Mengen gleichmächtig sind. Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen wird mit $\aleph_0$ bezeichnet. $\aleph$ ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets. Offensichtlich gilt für abzählbare Mengen

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \quad (2.40)$$

Überraschenderweise ist die Menge der rationalen Zahlen auch abzählbar, obwohl hier sowohl für den Zähler als auch für den Nenner unendliche Mengen in Frage kommen. Die Konstruktion dieser Abzählbarkeit stammt von Georg Cantor und heißt *Cantorsches Diagonalverfahren*. Man schreibt die rationalen Zahlen entsprechend ihrem Nenner auf, wobei man die Zahlen, die bereits aufgeführt sind, weglässt. Beispielsweise ist $2/2=1$ und wird weggelassen usw.

Damit ermöglicht man die folgende Abzählung: man bewegt sich immer auf der oberen Geraden bzw. auf der linken Vertikalen, bis man auf eine vollständige Diagonale trifft. Damit entsteht eine Folge, in der alle rationalen Zahlen vorkommen:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow \frac{5}{2} \dots$$

2 Mengenlehre und Logik

Nenner 1:	1	2	3	4	5	6	...
Nenner 2:	1/2	-	3/2	-	5/2	-	...
Nenner 3:	1/3	2/3	-	4/3	5/3	-	...
Nenner 4:	1/4	-	3/4	-	5/4	-	...
Nenner 5:	1/5	2/5	3/5	4/5	-	6/5	...
Nenner 6:	1/6	-	-	-	5/6	-	...
...							

Es zeigen sich auch weitere Gesetzmäßigkeiten: in der Diagonalen, die von der 4 nach unten führt, ist für die angegebenen Brüche die Summe von Zähler und Nenner immer gleich 5, bei der 6 ist diese Summe immer gleich 7 usw. Damit gilt

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \quad (2.41)$$



Abbildung 2.7: David Hilbert (1862-1943)

An die der Anschauung stark widersprechenden Folgerungen muss man sich erst gewöhnen. Ein Beispiel dafür ist das sogenannte Hilbertsche Hotel, das sich der berühmte deutsche Mathematiker David Hilbert ausgedacht hat.

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind. Das folgt aus dem *Schubfachprinzip*, das sehr einfach zu verstehen ist: hat man n Gegenstände und verteilt

2 Mengenlehre und Logik

diese auf m Schubfächer und ist $n > m$, dann gibt es wenigstens ein Fach, in dem mehr als ein Gegenstand liegt.

Hilberts Hotel hat nun unendlich viele Zimmer, die von 1 an nummeriert sind. Sind alle Zimmer belegt und es kommt ein neuer Gast, dann kann man für ihn ein Zimmer frei machen, indem jeder Gast um ein Zimmer weiter rückt und er in das Zimmer 1 einzieht. Kommt ein Bus mit endlich vielen neuen Gästen, dann wird für jeden neuen Gast diese Prozedur wiederholt. Das wird zwar eine Weile dauern, aber es wird jeder untergebracht.

Eine weitere Möglichkeit, die Gäste unterzubringen, liefert Cantors Diagonalverfahren. Das gibt die Möglichkeit, jede unendliche abzählbare Menge von Gästen unterzubringen, die es aber in Wirklichkeit gar nicht gibt.

Ein zweites Diagonalverfahren zeigt, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{11}r_{12}r_{13}r_{14}r_{15}r_{16} \dots \\ r_2 &= r_{21}r_{22}r_{23}r_{24}r_{25}r_{26} \dots \\ r_3 &= r_{31}r_{32}r_{33}r_{34}r_{35}r_{36} \dots \\ r_4 &= r_{41}r_{42}r_{43}r_{44}r_{45}r_{46} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Jetzt konstruiert man eine Zahl, die in dieser Aufzählung nicht vorkommen kann: man addiert zu jedem Element in der Diagonale von links oben nach rechts unten eine Eins; ergibt sich der Wert 10, dann verwendet man nur die 0. Es entsteht

$$r_1 = (r_{11} + 1)(r_{22} + 1)(r_{33} + 1)(r_{44} + 1)(r_{55} + 1) \dots$$

Diese Zahl ist mit Sicherheit in der Folge nicht enthalten. Die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen bezeichnet man mit $\aleph_1$.

Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist gleich $2^{\aleph_0}$. Die Frage, ob $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist, ist ein schwieriges Problem und soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Das geordnete Paar (x, y) von Elementen fasst die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge zusammen; die Elemente müssen genau in dieser Reihenfolge auftreten. Diese Paarbildung verwendet man für die Definition des Kreuzproduktes von zwei Mengen:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\} \tag{2.42}$$

2 Mengenlehre und Logik

Die Zusammenfassung (x, y, z) wird als *Tripel* bezeichnet. Die Erweiterung auf n Mengen führt zum Begriff des n -tupels oder des Vektors mit n Komponenten.

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \dots x_n \in X_n\}. \quad (2.43)$$

3 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 3.1 Man bestätige die Richtigkeit der folgenden logischen Gleichungen:

1. $\bar{p} = 1 \oplus p$,

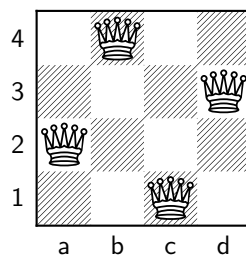
2. $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$,

3. $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$,

4. $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$,

5. $p \vee q = p \oplus q \oplus (p \wedge q)$.

Aufgabe 3.2 Auf einem kleinen Schachbrett der Größe $4 \cdot 4$ sind vier Damen zu positionieren, so dass keine Dame eine andere schlagen kann. Finde dafür eine logische Beschreibung!



Aufgabe 3.3 Wenn $x+y+z = M$, $x+y-z = N$, $x-y+z = O$, $y+z-x = P$ gilt, wie groß ist dann

1. $M + N + O + P$,

3 Aufgaben und Lösungen

2. $M - N + O - P$,

3. $M - N - O + P$,

4. $M - N - O - P$?

Aufgabe 3.4 Wende das Distributivgesetz auf $(3p-2q)(x-y)+(5p+3q)(x-y)$ an und vereinfache den dadurch entstandenen Ausdruck.

Bruchrechnung ist schon etwas schwieriger. Es empfiehlt sich, erst die Lösung per Hand zu versuchen.

Aufgabe 3.5 Vereinfache

$$\frac{11mno}{13pqr} \cdot \left(\frac{3}{4} \frac{pr}{mo} + \frac{3}{7} nq - \frac{5}{6} \frac{rq}{no} \right) .$$

Aufgabe 3.6 Berechne $\frac{25ab}{4mn} / \frac{5a}{2m} / \frac{6b^2}{7n} / \frac{3}{14b}$.

Aufgabe 3.7 Ist 24 ein Teiler von 7608? Welche kleineren Zahlen sind ebenfalls Teiler? Warum?

Aufgabe 3.8 Das um 1 verminderte Quadrat einer Primzahl p , die größer als 3 ist, ist stets durch 24 teilbar. Warum?

Periodische Dezimalbrüche lassen sich immer in rationale Zahlen umwandeln.

Aufgabe 3.9 Wandle $0,010101\dots$ und $0,142857142857\dots$ in rationale Zahlen um.

Aufgabe 3.10 Berechne $\frac{11,11^{2,2} \cdot 3,33^{-4,4}}{\sqrt[55]{6666}}$.

3 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 3.11 Berechne

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$$

für $a = 51,693$, $b = 61,693$, $c = 68,6868$. Schätze das Ergebnis vorher ab.

Aufgabe 3.12 Berechne $x = 10 + \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{10}}$.

Aufgabe 3.13 Berechne $\frac{7^7}{\sqrt[7]{7 \cdot \sqrt[7]{7}}}$.

Für zwei Zahlen x und y ist

$$m = \frac{x+y}{2} \quad (3.1)$$

das *arithmetische Mittel* m der beiden Zahlen x und y . Das *geometrische Mittel* g ist wie folgt definiert:

$$g = \sqrt{x \cdot y}. \quad (3.2)$$

Aufgabe 3.14 Zeige, dass das arithmetische Mittel stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel ist.

Aufgabe 3.15 Es sei $\log a = 3,27654$, $\log b = 3,13854$. Berechne $\log(a+b)$.

Aufgabe 3.16 Es sei $\log a = 3,06475$, $\log b = 2,78564$. Berechne $\log(a-b)$.

Nun sollen einige Aufgaben folgen, die komplexe Zahlen enthalten.

Aufgabe 3.17 1. Diskutiere den Ausdruck $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ für $a < 0, b < 0$, für $a > 0, b > 0$ und für $a > 0, b < 0$.

2. Berechne $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$.

3. Berechne $(\sqrt{-17} + \sqrt{-19}) \cdot (\sqrt{-119} - \sqrt{-133})$.

3 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 3.18 Berechne

$$(\sqrt{-1}^{4n}), (\sqrt{-1}^{4n+1}), (\sqrt{-1}^{4n+2}), (\sqrt{-1}^{4n+3}),$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 3.19 Es sei $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und n eine ganze Zahl. Zeige, dass

$$z_1^3 = 1, \quad z_2^3 = 1, \quad z_1^2 = z_2, \quad z_2^2 = z_1, \quad z_1^{3n} = z_2^{3n} = 1, \quad z_1^{3n+1} = z_2^{3n+2} = z_1, \quad z_2^{3n+1} = z_1^{3n+2} = z_2.$$

Lösung 3.1 Alle Gleichungen werden am einfachsten dadurch verifiziert, dass man die möglichen zwei oder vier Kombinationen der Variablen in einer Tabelle zusammenstellt und die Definition der logischen Operationen verwendet. Die Übereinstimmung der linken und der rechten Seite der Gleichung betätigen das Ergebnis. Wir verwenden hier die Wahrheitswerte 0 und 1.

p	$\bar{p}$	$1 \oplus p$
0	1	$1 \oplus 0 = 1$
1	0	$1 \oplus 1 = 0$

Als zweites Beispiel verwenden wir noch eine Tabelle für die letzte Gleichung, die anderen Gleichungen lassen sich auf die gleiche Weise zeigen!

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$	$p \oplus q \oplus p \wedge q$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Diese Lösung mit Hilfe einer Wahrheitstabelle lässt sich für kleine (und mittlere) Variablenzahlen ganz gut verwenden, dennoch ist die Anzahl der Zeilen für n Variable gleich 2^n und nimmt sehr schnell zu. Man spricht hier von exponentieller Komplexität.

3 Aufgaben und Lösungen

Lösung 3.2 Zuerst definiert man die logischen Werte, die man verwenden will:

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{falls eine Dame auf dem Feld } a_1 \text{ steht} \\ 0, & \text{falls keine Dame auf dem Feld } a_1 \text{ steht.} \end{cases}$$

Das gilt auch für alle anderen Felder, man muss mit 16 logischen Variablen arbeiten. Das Problem hat also prinzipiell eine Komplexität von $2^{16} = 65536$.

Auf Grund der Kenntnis der Zugregeln für eine Dame weiß man, dass sich in jeder Horizontalen, Vertikalen und Diagonalen nur eine Dame befinden darf. Das bringt man beispielsweise für das Feld a_1 durch die folgende Konjunktion zum Ausdruck:

$$a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{b}_2 \bar{c}_3 \bar{d}_4 \bar{b}_1 \bar{c}_1 \bar{d}_1$$

Dabei ist die Konjunktion zwischen den einzelnen Variablen so wie das Multiplikationszeichen in der Arithmetik weggelassen. Man drückt nach a_1 zuerst die Bedingungen für die Vertikale, danach die für die Diagonale und danach die für die Horizontale aus. Auf die Reihenfolge kommt es natürlich nicht an, man muss nur Obacht geben, dass man keine Variable vergisst.

Als nächstes tragen wir der Tatsache Rechnung, dass prinzipiell die Dame in der ersten Vertikalen auf einem der vier Felder stehen kann:

$$a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 = 1 .$$

Wenn wir jede Variable um die entsprechenden Nebenbedingungen erweitern, dann entstehen folgende Konjunktionen für die erste Vertikale:

$$K_1 = a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_1 \bar{c}_3 \bar{d}_1 \bar{d}_4$$

$$K_2 = a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \bar{c}_2 \bar{c}_4 \bar{d}_2$$

$$K_3 = a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_4 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \bar{b}_4 \bar{c}_1 \bar{c}_3 \bar{d}_3$$

$$K_4 = a_4 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{b}_3 \bar{b}_4 \bar{c}_2 \bar{c}_4 \bar{d}_1 \bar{d}_4 .$$

Hier sind nun “der Ordnung halber” die negierten Variablen in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt.

Da eine der vier Positionen in Frage kommt, muss gelten:

$$S_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 = 1 .$$

3 Aufgaben und Lösungen

Die vier Möglichkeiten schließen sich gegenseitig aus, man könnte auch die Antivalenz verwenden:

$$S_1 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus K_4 = 1 .$$

Es ist nun etwas mühselig, analoge Beziehungen für die zweite (S_2), dritte (S_3) und vierte (S_4) Spalte aufzustellen. Es sollte aber anhand der bisherigen Überlegungen machbar sein.

Schließlich müssen wir noch der Tatsache Rechnung tragen, dass diese vier Ausdrücke für die einzelnen Spalten gleichzeitig erfüllt sein müssen. Das können wir durch ihre Konjunktion ausdrücken:

$$L = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 = 1 .$$

Alle Belegungen der 16 Variablen mit 0 oder 1, die die Gleichung für L erfüllen, sind eine Lösung des Problems.

Für ein Brett der Größe $4 \cdot 4$ gibt es nur die Lösung, die in der Aufgabenstellung angegeben ist, sowie deren Spiegelung an der mittleren (horizontalen oder vertikalen) Linie.

Über die letzten Jahre und Jahrzehnte hat sich ein regelrechter Wettkampf ergeben, dieses Problem für immer größere Schachbretter zu lösen. Im Moment ist man bei $n = 27$ angelangt mit riesigen Zahlen für die Menge der Lösungen. Für das normale Schachbrett $8 \cdot 8$ hatte bereits C. F. Gauss die Lösungszahl 92 bestimmt.

Lösung 3.3 Die Lösung per Hand ist nicht schwierig, man schreibt die Ausdrücke für M, N, O, P auf und muss das Minuszeichen vor den Klammern beachten:

$$-N = -(x + y - z) = -x - y + z .$$

Wollen wir auf ganz elementare Regeln zurückgehen, so sehen wir die Benutzung von

$$\begin{aligned} x + x &= 2x , \\ -(-x) &= x , \\ x - x &= 0 , \\ x \pm 0 &= x . \end{aligned}$$

Anschließend ordnen wir alle Variablen direkt zu, etwa $M := x + y + z, \dots$

3 Aufgaben und Lösungen

1. Hier erhält man das Ergebnis $2x + 2y + 2z$, und durch Ausklammern der 2 erhält man $2(x + y + z)$.
2. $2x - 2y + 2z = 2(x - y + z)$,
3. $2z + 2y - 2x = 2(z + y - x)$,
4. 0.

Lösung 3.4 Ein einfaches Ausmultiplizieren ergibt der Reihe nach

$$\begin{aligned} (3p - 2q)(x - y) + (5p + 3q)(x - y) &= \\ (3px - 3py - 2qx + 2qy) + (5px - 5py + 3qx - 3qy) &= \\ 8px - 8py + qx - qy. \end{aligned}$$

Lösung 3.5 Abbildung 3.1 zeigt den gegebenen Ausdruck und das Ergebnis. Man sieht, dass in der Klammer der Hauptnenner **mno** verwendet wird; da-

$$\frac{\frac{11 \mathbf{mno}}{13 \mathbf{pqr}} \left(\frac{3 \mathbf{pr}}{4 \mathbf{mo}} + \frac{3}{7} \mathbf{nq} - \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{\mathbf{rq}}{\mathbf{no}} \right) \right)}{\frac{\frac{33 \mathbf{moqn}^2}{91} + \frac{33 \mathbf{npr}}{52} - \frac{55 \mathbf{mqr}}{78}}{\mathbf{pqr}}}$$

Abbildung 3.1: Vereinfachung eines Ausdruckes

mit erhält man für die Zähler der drei Brüche der Reihe nach **prn**, **mn²oq** und **mrq**. Damit kann man diesen Hauptnenner gegen das **mno** vor der Klammer kürzen. Wenn der Doppelbruch stört, dann sucht man noch einmal den Hauptnenner von 91, 52 und 78, der ist gleich **1092**. Damit erhält man

$$\frac{396 \mathbf{moqn}^2 + 693 \mathbf{npr} - 779 \mathbf{mqr}}{1092 \mathbf{pqr}}.$$

Ob man den einen oder anderen Ausdruck besser findet, ist beinahe schon Geschmackssache.

Lösung 3.6 Schon bei der Aufgabenstellung verwenden wir für die Division zwei Darstellungsformen, um den Ausdruck übersichtlich zu halten. Wir benötigen zwei wesentliche Gesetze für die Division:

3 Aufgaben und Lösungen

- Assoziativität: $(x/y)/z = x/(y/z)$.
- Multiplikation mit dem reziproken Wert: $a/(b/c) = a \cdot (c/b)$.

Die mehrfache Anwendung dieser Gesetze liefert das Endergebnis $\frac{245}{18} \approx 13.6111 \dots$

Lösung 3.7 Wir suchen alle Faktoren von 7608 durch mit dem Ergebnis $2^3 \cdot 3 \cdot 317$, oder ausgeschrieben

$$7608 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 317 .$$

Dass 317 eine Primzahl ist, findet man, indem man das Sieb des Erathostenes bis 160 anwendet. Man kann auch eine Tabelle im Internet suchen und verwendet beispielsweise <https://de.wikibooks.org/wiki/Primzahlen> Aus dem Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ kann man jeweils eine Zahl, zwei, drei oder vier Zahlen auswählen und erhält die Teiler $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 634, 951, 1268, 1902, 2536, 3804, 7608\}$.

Lösung 3.8 Wir schreiben für eine Primzahl p im Sinne der Aufgabenstellung $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$. Da p als Primzahl größer als 3 sein soll, sind $p-1$ und $p+1$ jeweils gerade Zahlen. Damit tritt der Faktor oder Teiler 2 auf. Außerdem tritt bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen wenigstens bei einer der Teiler 3 auf. Da p als Primzahl dafür nicht in Frage kommt, ist entweder $(p-1)$ oder $p+1$ durch 3 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist eine auch durch 4 teilbar. Aus dem Produkt der nachgewiesenen Teiler für $(p+1)$ und $(p-1)$ ergibt sich der Teiler $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ für $p^2 - 1$.

Lösung 3.9 Man setzt $x = 0.01010101 \dots$, die Wiederholung der Ziffern erfolgt alle zwei Stellen, also multiplizieren wir x mit 10^2 und erhalten

$$\begin{aligned} x &= 0,01010101 \dots \\ 100 \cdot x &= 1,01010101 \dots \\ 100 \cdot x - x &= 1 \\ 99 \cdot x &= 1 \\ x &= \frac{1}{99} . \end{aligned}$$

3 Aufgaben und Lösungen

Die Subtraktion setzt alle Stellen nach dem Komma auf 0, und damit erhält man die entsprechende rationale Zahl. Zur Sicherheit kann man die Lösung überprüfen, indem man $\frac{1}{99}$ eingibt und die Lösungen miteinander vergleicht.

Bei der zweiten Zahl muss man in gleicher Weise verfahren, allerdings tritt hier die Periode erst nach sechs Stellen auf, man muss also den Ausgangswert mit 1 000 000 multiplizieren. Damit erhält man $999\,999 \cdot x = 142\,857$.

Lösung 3.10 Hier führt eine direkte Eingabe der Werte in einen Online-Taschenrechner zum Ergebnis 0,852.

Lösung 3.11 Wiederum führt eine direkte Eingabe der Werte unmittelbar zum Ziel. Man verwendet die Zuweisungen $a := 51.693, b := 61.693, c := 68.6868$. Einen Schätzwert erhält man, wenn man mit den gerundeten Werten $a = 50, b = 60, c = 70$ arbeitet. Dann ist $a + b + c = 180, a + b - c = 40, a \cdot b = 3000$. Damit entsteht unter der Wurzel der Quotient

$$\frac{7200}{3000} = 2.4 .$$

$\sqrt{2} \approx 1.4$, also sollte das Ergebnis bei ≈ 1.5 liegen. Ein Online-System errechnet den Wert 1.549193, wenn man 6 Stellen eingestellt hat.

Lösung 3.12 Auf sechs Stellen gerechnet erhält man $x = 11.273942$.

Lösung 3.13 Gibt man den gesamten Ausdruck korrekt ein, dann erhält man

$$\frac{7^7}{\sqrt[7]{7 \cdot \sqrt[7]{7}}} = \frac{823543}{\sqrt[7]{7 \cdot \sqrt[7]{7}}} = 599392.203865 .$$

Man kann auch Konstruktion dieses Wertes Schritt für Schritt verfolgen:

$$\begin{aligned}\sqrt[7]{7} &= 1.320469 , \\ 7 \cdot \sqrt[7]{7} &= 9.243285 , \\ \sqrt[7]{7 \cdot \sqrt[7]{7}} &= 1.373963 , \\ \frac{823543}{1.373963} &= 599392.203865 .\end{aligned}$$

3 Aufgaben und Lösungen

Lösung 3.14 *Wir untersuchen die Beziehung*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} .$$

Dann gilt der Reihe nach

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{4} &\geq x \cdot y , \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 4xy , \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 , \\ (x-y)^2 &\geq 0 . \end{aligned}$$

Und nun verwendet man eine Methode, die sehr oft benutzt wird: nachdem man sich Klarheit verschafft hat über die Verhältnisse, überzeugt man sich davon, dass man die Rechnung auch von unten nach oben vollziehen kann, so wie es hier der Fall ist. Damit ist alles bewiesen!

Lösung 3.15 *Wir verwenden die Tatsache, dass die Logarithmus-Funktion $\log$ die Umkehrung von Potenzen zur Basis 10 ist. Man beseitigt also den Logarithmus und bestimmt die Werte für a und b (auf vier Stellen - wie eine "alte" Logarithmentafel:*

$$\begin{aligned} \log a &= 3.27654 \\ 10^{\log a} &= 10^{3.27654} \\ a &= \underline{1890.3403} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3.13854 \\ 10^{\log b} &= 10^{3.13854} \\ b &= \underline{1375.7515} . \end{aligned}$$

Man sieht hier, dass die beiden Werte "etwas" über der 1000 liegen, da die 3 als erste Ziffer der beiden Logarithmen 10^3 anzeigt. Die beiden Werte kann man direkt ins System eingeben. Nun werden die beiden Zahlen addiert, und danach wird der Logarithmus der Summe gebildet.

$$\begin{aligned} a + b &= 3266.0918 \\ \log(a + b) &= \underline{3.5140} . \end{aligned}$$

3 Aufgaben und Lösungen

Lösung 3.16 Man erhält auf die gleiche Weise wie zuvor $\log(a-b) = \underline{2.7406}$.

Lösung 3.17 Wir untersuchen nacheinander die drei Möglichkeiten.

1.
 - Für $a < 0$ und $b < 0$ sind $-a$ und $-b$ positive Zahlen, und die Wurzeln werden normal ausgerechnet.
 - Für $a > 0$ und $b > 0$ sind $-a$ und $-b$ negative Zahlen. Wenn wir beispielsweise $a = 3$ und $b = 5$ eingeben, dann entsteht

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{3} \cdot i \cdot \sqrt{5} \cdot i = -\sqrt{15}.$$

- Für den dritten Fall soll $a = 3$ und $b = -5$ sein. Man formt $\sqrt{-5}$ in $\sqrt{5} \cdot i$ um, es ergibt sich $\sqrt{15} \cdot i$ bzw. $3.87298 \cdot i$.
2. Man erhält der Reihe nach $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Setzt man die Multiplikation mit i fort, so erhält man wieder die gleichen Werte.

Betrachtet man die geometrische Darstellung $\cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot i$, so sieht man, dass jede Multiplikation mit i einer Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entspricht.

3. Hierzu stellt man zunächst fest, dass $119 = 7 \cdot 17$ und $133 = 7 \cdot 19$ gilt. Danach ersetzt man die Werte unter dem Wurzelzeichen durch explizite komplexe Darstellungen, wie zum Beispiel $\sqrt{-17} = \sqrt{17} \cdot i$. Durch Ausmultiplizieren der Klammern nach dem Distributivgesetz entsteht dann das gesuchte Ergebnis:

$$(\sqrt{17}i + (\sqrt{19}i)(\sqrt{7 \cdot 17}\sqrt{7 \cdot 19}i) = \sqrt{7}(-19 + 17i).$$

Lösung 3.18 Für $n \geq 0$ verwenden wir den vorhergehenden Punkt und spalten die Potenzen auf: $i^{4n} = (i^4)^n$, $i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i$ usw. Damit kann man unmittelbar die Ergebnisse der vorherigen Aufgabe verwenden.

Für negative Exponenten ergibt sich stets eine Drehung im Uhrzeigersinn. Man erhält nacheinander $i^{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i, i^{-4} = 1$.

3 Aufgaben und Lösungen

Lösung 3.19 *Es wird der Rechner auf der Webseite*

<https://de.symbolab.com/solver/complex-numbers-calculator/>

verwendet. Bei sorgfältiger Eingabe erhält man

$$z_1^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$z_1^3 = 1$$

$$z_2^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$z_2^3 = 1.$$

Damit erhält man sofort die restlichen Ergebnisse.

4 Abbildungen, Relationen, Funktionen, Gleichungen

4.1 Abbildungen

Geordnete Paare, Tripel und n-tupel werden im Folgenden benutzt, um wichtige Kerngebiete der Mathematik zu definieren, die man gründlich studieren muss.

Eine *Abbildung* f ist eine Menge geordneter Paare: ist $(x, y) \in f$, so schreibt man $y = f(x)$. y ist ein *Bildelement* von x , x ist ein *Urbildelement* von y . Die Menge aller ersten Elemente bildet den *Definitionsbereich* $D(f)$ der Abbildung, die Menge aller zweiten Elemente den *Wertebereich* $W(f)$. Es gilt:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}, \quad (4.1)$$

$$f \subseteq D(f) \times W(f). \quad (4.2)$$

Man kann eine Abbildung auch in umgekehrter Richtung betrachten:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}. \quad (4.3)$$

Die Abbildung f^{-1} heißt *inverse* oder *Umkehrabbildung* von f .

Im Alltag trifft man Abbildungen in Hülle und Fülle an. Auto-, Pass- oder Personalausweis-Nummern, Geburtstage, Wohnorte, Kontonummern - das sind alles Abbildungen, die in unterschiedlichen Bereichen definiert sind.

Definition. Eine Funktion f ist eine *eindeutige Abbildung* mit einem Definitionsbereich $D(f)$ und einem Wertebereich $W(f)$.

Eine Abbildung (Funktion) ist *eineindeutig*, wenn sowohl f als auch f^{-1} eindeutig sind. In diesem Fall ist auch f^{-1} eine Funktion; sie wird oft als *Umkehrfunktion* bezeichnet.

Ein Spezialfall ist die *identische Abbildung*, die jedes Element einer Menge M auf sich selbst abbildet. Es gilt:

$$id(x) = x \quad \forall x \in M. \quad (4.4)$$

4.2 Relationen

Man kann aber auch zwischen den Elementen einer Menge X selbst Beziehungen feststellen, die man unter dem Begriff *Relation* zusammenfasst. Eine Relation R in der Menge X ist eine Teilmenge von $X \times X$.

Beispiel. Ist $A = \{a, b\}$, dann enthält die Potenzmenge die Elemente

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Die Relation $\subseteq$ kann man übersichtlich durch die folgende Tabelle 4.1 darstellen. Dabei bezeichnet der Wert 1 die Tatsache, dass das entsprechende Paar zur Relation gehört (in dieser Relation zueinander steht), während der Wert 0 anzeigt, dass das entsprechende Paar nicht zur Relation gehört.

Tabelle 4.1: Die Relation $\subseteq$, dargestellt durch ihre Relationentabelle

$\subseteq$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	1	1	1	1
$\{a\}$	0	1	0	1
$\{b\}$	0	0	1	1
$\{a, b\}$	0	0	0	1

Man kann auch die Relation $\subset$ für die Elemente der Potenzmenge betrachten. In diesem Fall ist die Gleichheit ausgeschlossen, die Einsen in der Hauptdiagonalen werden durch Nullen ersetzt.

Da es sich bei den Relationen um Mengen handelt, kann man alle Operationen, die für Mengen möglich sind, auch auf Relationen anwenden. Insbesondere kann man die Paarbildung $\times$ mit $\cup$ und $\cap$ kombinieren.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad (4.5)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C). \quad (4.6)$$

Tabelle 4.2: Die Relation $\subset$, dargestellt durch ihre Relationentabelle

$\subset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\emptyset$	0	1	1	1
$\{a\}$	0	0	0	1
$\{b\}$	0	0	0	1
$\{a, b\}$	0	0	0	0

Relationen gehören zu den wichtigsten Begriffen, mit denen man in die mathematische Modellierung eines Problembereiches einsteigen kann. Wir stellen die wichtigsten Eigenschaften zusammen und zeigen, was aus diesen Eigenschaft folgt und welche Strukturen dadurch entstehen.

1. Eine Relation $\mathbb{R}$ in der Menge A ist *reflexiv*, wenn $x \mathbb{R} x$ für alle $x \in A$ gilt. In der zugehörigen Relationentabelle steht in der Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten immer der Wert 1 (siehe Tabelle 4.1). Die Gleichheit von Zahlen ist ein weiteres Beispiel für eine reflexive Relation.
2. Eine Relation $\mathbb{R}$ in der Menge A ist *irreflexiv*, wenn für kein einziges x $(x, x) \in \mathbb{R}$ ist. In der zugehörigen Relationentabelle steht in der Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten immer der Wert 0 (siehe Tabelle 4.2). Eine andere irreflexive Relation ist $<$ für Zahlen.
3. Eine Relation ist *symmetrisch*, wenn aus $(a, b) \in \mathbb{R}$ folgt, dass auch $(b, a) \in \mathbb{R}$ ist.

Wenn man etwa eine Länge misst und stellt fest, dass $l_1 = l_2$ ist, dann ist natürlich $l_2 = l_1$; man vertauscht quasi die Reihenfolge der Messungen.

4. Eine Relation $\mathbb{R}$ ist *antisymmetrisch*, wenn aus $(a, b) \in \mathbb{R}$ und $(b, a) \in \mathbb{R}$ folgt, dass $a = b$ ist.

Das ist der Fall für Mengen und die Relation $\subseteq$ sowie für Zahlen und die Relation $\leq$.

5. Eine Relation $\mathbb{R}$ ist *asymmetrisch*, wenn für kein $(a, b) \in \mathbb{R}$ gilt, dass auch $(b, a) \in \mathbb{R}$ ist.

Als Beispiel kann man hier $<$ für Zahlen oder $\subset$ für Mengen nehmen.

6. Eine Relation $\mathbb{R}$ ist *transitiv*, wenn aus $(a, b) \in \mathbb{R}$ und $(b, c) \in \mathbb{R}$ folgt, dass auch $(a, c) \in \mathbb{R}$ ist. Die Relation $\mathbb{R}$ wird quasi über b nach c verlängert:

$$(a < b) \text{ und } (b < c) \Rightarrow a < c.$$

Jede einzelne Eigenschaft für sich genommen ist nicht besonders aufregend. Das ändert sich, wenn man mehrere Eigenschaften gleichzeitig fordert oder feststellen kann.

Definition. Eine Relation $\mathbb{R}$ ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Betrachten wir beispielsweise die Menge $\mathbb{S}$ aller Schüler einer Schule. Dann kann man die Relation $\mathbb{R}$ folgendermaßen definieren: für zwei Schüler s_1 und s_2 gilt $(s_1, s_2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ beide gehen in die gleiche Klasse. Die charakteristische Eigenschaft besteht darin, dass die Grundmenge $\mathbb{S}$ in disjunkte Teilmengen $K_1, \dots, K_n$ zerlegt wird, mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{n-1} \cup K_n &= \mathbb{S} \\ K_i \cap K_j &= \emptyset \text{ für } i \neq j. \end{aligned}$$

Man kann aber auch umgekehrt vorgehen. Es kann sein, dass eine disjunkte Zerlegung (eine *Partition*) einer Menge $\mathbb{M}$ vorliegt, in der jedes Element von $\mathbb{M}$ in genau einer Teilmenge vorkommt. Dann gilt:

$$\mathbb{M} = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{n-1} \cup M_n \text{ und } M_i \cap M_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, i, j = 1 \dots n,$$

und die Relation $\mathbb{R}$ wird durch die Mitgliedschaft in einer Klasse M_i definiert. Derartige Klasseneinteilungen und daraus folgende Relationen gibt es wie Sand am Meer.

Sehr wichtig und vielfach benutzt sind Ordnungsrelationen. Eine Relation $\leq$ auf einer Menge $\mathbb{M}$ ist eine *Ordnungsrelation*, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und *vollständig* ist. Die Vollständigkeit drückt sich dadurch aus, dass beliebige Elemente vergleichbar sind:

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x. \quad (4.7)$$

Dies ist beispielsweise beim Zahlenstrahl der Fall; deshalb heißt eine solche Ordnung auch *lineare Ordnung*. Diese Ordnungsrelation wird an vielen Stellen angewendet. Ein ganz bekanntes Beispiel sind Wörterbücher oder Kataloge.

4 Abbildungen, Relationen, Funktionen, Gleichungen

Hier wird die gegebene Reihenfolge der Buchstaben verwendet, um die Wörter, die in das Buch aufgenommen werden sollen:

$$a < b < c < \dots < x < y < z.$$

Ist der erste Buchstabe bei zwei Wörtern gleich, dann bestimmt der zweite Buchstabe die Reihenfolge:

$$aa < ab < ac < \dots < ax < ay < az.$$

Ein Leerzeichen ist kleiner als alle Buchstaben: Haus wird vor Haustür geschrieben usw. Sehr oft werden die betrachteten Gegenstände numeriert, beispielsweise die Häuser einer Straße. Hat ein Haus mehrere Eingänge, dann ist die Hausnummer für alle Eingänge gleich, und die einzelnen Eingänge werden mit Hilfe von Kleinbuchstaben numeriert: 23a, 23b, 23c, 23d.

Eine schwächere Form einer Ordnungsrelation ist die *Halbordnung*.

Definition. Eine Relation $\mathbb{R}$ ist eine Halbordnungsrelation, wenn sie *transitiv*, *reflexiv* und *antisymmetrisch* ist.

In Tabelle 4.1 wurde die Relation $\subseteq$ dargestellt; das ist eine Halbordnungsrelation, weil weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$ gilt. Die beiden Mengen sind unvergleichbar. Die Abbildung 2.6 zeigt den Graphen einer Halbordnungsrelation.

Andere Halbordnungen entstehen, wenn wir die Menge aller Teiler einer bestimmten Zahl betrachten die folgende Relation $\mathbb{R}$ mit

$$(a, b) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \text{ ist ein Teiler von } b.$$

Nehmen wir beispielsweise die Zahl 10. Sie hat die Teiler 1, 2, 5 und 10. Die Zahl 12 hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und 12.

Man könnte an jedem Knoten noch eine Schleife anbringen, weil jede Zahl auch Teiler von sich selbst ist. Das würde aber die Übersichtlichkeit einschränken. Man sieht in Abb. 4.1. dass beispielsweise (2,5), (2,3), (4,6) nicht zur Relation gehören. Die Mengen $\{1, 2, 5, 10\}$ bzw. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ sind nur halbgeordnet; es lassen sich aber in beiden Mengen geordnete Teilmengen definieren, die sich durch lineare Anordnungen darstellen lassen. Eine solche lineare Anordnung ist durch die roten Kanten dargestellt.

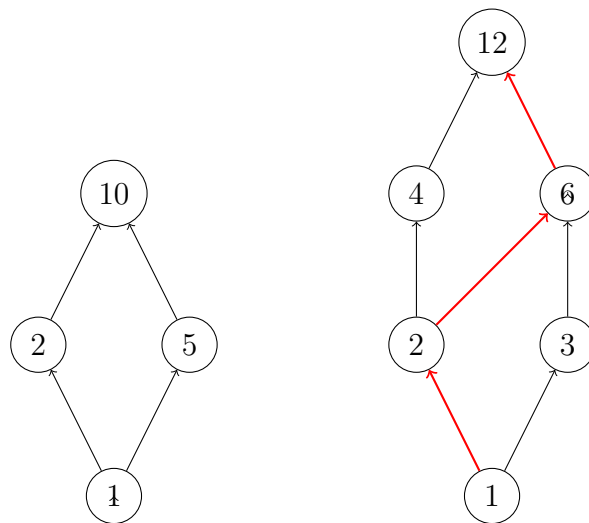


Abbildung 4.1: Halbgeordnete Mengen von Teilern

Besonders einfach sind die Relationengraphen für Äquivalenzrelationen. Dort ist jeder Knoten mit jedem anderen verbunden:

4.3 Funktionen

Funktionen $y = f(x)$ werden oft in einem (x, y) -Koordinatensystem dargestellt. Es existiert eine Vorschrift, mit deren Hilfe man für jeden Wert von x einen Wert von y berechnen kann. Tut man das für viele Werte von x , dann entsteht ein charakteristisches Bild der Funktion.

4.3.1 Lineare Funktionen und Gleichungen

Eine lineare Funktion wird immer durch eine Gerade dargestellt. Ihre mathematische Beschreibung hat die Form

$$y = m \cdot x + n. \quad (4.8)$$

Man kann wahlweise in diesem Ausdruck einen beliebigen Wert für x einsetzen und den Wert von y berechnen oder umgekehrt. Dabei sind m und n gegebene

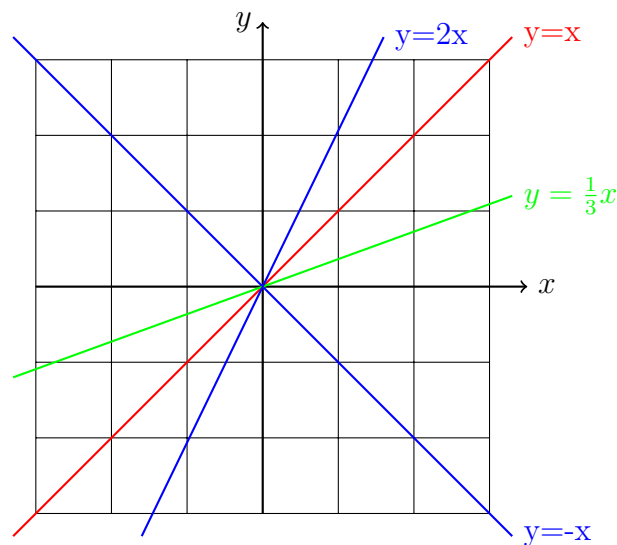


Abbildung 4.2: Geraden $y = m \cdot x$ mit verschiedenen Werten von m

Konstanten. Wir untersuchen zuerst die Form $y = m \cdot x$. Die entsprechenden Geraden lassen sich sehr einfach bestimmen: für $x = 0$ ist auch $y = 0$; sie gehen also alle durch den Nullpunkt. Für $x = 1$ ist $y = m$; damit hat man sofort einen zweiten Punkt $(1, m)$ und kann die Gerade zeichnen, indem man diese beiden Punkte durch eine Gerade verbindet.

Die allgemeine Form $y = m \cdot x + n$ macht ebenfalls keine Schwierigkeiten. Die Gerade wird einfach um den Wert n nach oben oder nach unten verschoben, je nachdem, ob n positiv oder negativ ist.

Betrachtet man $y = m \cdot x + n$ als Funktion $y = f(x)$, dann existiert auch die Funktion $f^{-1}(x)$. Diese Funktion erhält man, indem man den Ausdruck $y = m \cdot x + n$ nach x umstellt.

Beispiel. Gegeben sei $y = 3 \cdot x - 4$. Dann erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot x - 4 \\ y + 4 &= 3 \cdot x \\ \frac{1}{3} \cdot (y + 4) &= x. \end{aligned}$$

Lediglich die Parallelen zu den Koordinatenachsen erlauben keine unverse Funktion: $y = c$ beschreibt beliebige Parallelen zur x -Achse; dabei wird aber

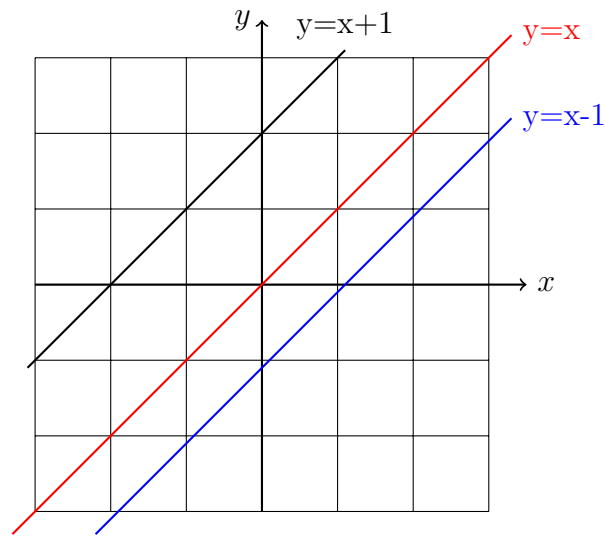


Abbildung 4.3: Geraden $y = m \cdot x + n$ mit verschiedenen Werten von n

jedem Wert von x der gleiche Wert von y zugeordnet, so dass keine eindeutige Umkehrung möglich ist. Das Gleiche gilt für die Parallelen zur y -Achse, die durch $x = c$ beschrieben werden.

Fasst man $y = mx + n$ als Gleichung auf, dann wird der Wert als Lösung der Gleichung bezeichnet, für den $y = 0$ gilt. Dieser Wert wird auch als *Nullstelle* bezeichnet. Er ergibt sich durch den gleichen Rechenweg.

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot x - 4 \\ 0 &= 3 \cdot x - 4 \\ 4 &= 3 \cdot x \\ \frac{4}{3} &= x. \end{aligned}$$

Sind zwei Punkte gegeben, so kann man aus ihnen die lineare Gleichung bestimmen, wenn sie nicht zueinander parallel sind.

Beispiel. Es seien die Punkte $X_1 = (-2, -1)$ und $X_2 = (3, 1)$ gegeben. Ihr Abstand in y -Richtung ist gleich 2, in x -Richtung gleich 5. Also ist der Anstieg m gleich $\frac{2}{5}$. Die Nullstelle muss genau in der Mitte liegen, also bei $x = 0,5$. Damit findet man die Gleichung für die Gerade, die diese beiden Punkte verbindet:

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

4 Abbildungen, Relationen, Funktionen, Gleichungen

Das Einsetzen der beiden Punkte bestätigt, dass beide Punkte auf dieser Geraden liegen.

Für die Bestimmung der Umkehrfunktion löst man die Gleichung nach x auf und erhält $x = \frac{5}{2}(y - \frac{1}{2})$. Es ist üblich, die Umkehrfunktion in normaler Schreibweise darzustellen und x und y miteinander zu vertauschen. Man erhält

$$y = \frac{5}{2} \cdot (x - \frac{1}{2}).$$

Man verwendet lineare Funktionen und Gleichungen häufig bei der Umrechnung von Währungen, Maßen und Gewichten. Hier geht man meistens von *Proportionen* aus. Heute (2. 5. 2024) ist für den Umtausch von Euro in US\$ ein Kurs von 1 € gegen 1,06774 US\$ festgelegt. Zur Umrechnung von Euro in Dollar und umgekehrt verwendet man eine Proportion:

$$\frac{1}{1,07} = \frac{x}{y}.$$

Die zugehörige Gleichung erlaubt es, Dollar in Euro oder Euro in Dollar umzutauschen:

$$\begin{aligned} y &= x \cdot 1,07 \\ x &= \frac{y}{1,07}. \end{aligned}$$

Für x setzt man einen Eurobetrag ein, den man umtauschen möchte. Die Multiplikation mit 1,07 ergibt dann den entsprechenden Dollarbetrag y . Umgekehrt geht es genauso.

4.3.2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Eine allgemeine quadratische Funktion hat die Form

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \quad (4.10)$$

Ihre Darstellung ist immer eine Parabel, deren Lage von den Konstanten a, b, c abhängt (siehe Abbildung 4.4). Diese allgemeine Form kann man in die Normalform

$$y = x^2 + p \cdot x + q \quad (4.11)$$

überführen:

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \\ y &= x^2 + p \cdot x + q, \end{aligned}$$

wenn man $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ setzt.

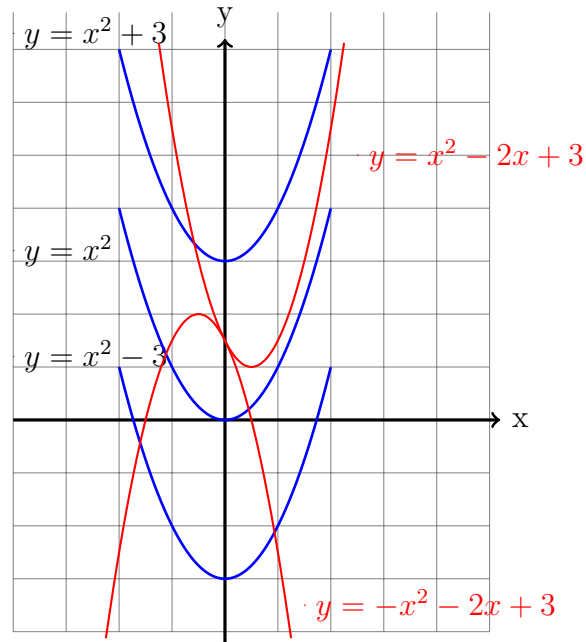


Abbildung 4.4: Parabeln an verschiedenen Stellen

Die Lösung der zugehörigen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man direkt angeben:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (4.12)$$

1. Ist $\frac{p^2}{4} - q > 0$, dann erhält man zwei reelle Lösungen.
2. Ist $\frac{p^2}{4} - q = 0$, dann erhält man eine reelle Lösung (eine Doppellösung).
3. Ist $\frac{p^2}{4} - q < 0$, dann erhält man zwei komplexe Lösungen.

Umgekehrt ist eine quadratische Funktion vollständig bestimmt, wenn man ihre beiden Nullstellen $(a, 0)$ und $(b, 0)$ kennt:

$$\begin{aligned}(x-a) \cdot (x-b) &= x^2 + p \cdot x + q \\ x^2 - a \cdot x - b \cdot x + a \cdot b &= x^2 + p \cdot x + q \\ x^2 + (-a-b) \cdot x + a \cdot b &= x^2 + p \cdot x + q\end{aligned}$$

ergibt $p = -a - b$ und $q = a \cdot b$.

4.3.3 Polynome

Nun sollen die Werte der Potenzen von x erhöht werden. Die einfachste Funktion ist $y = x^3$. Sie hat die dreifache Nullstelle $x = 0$.

Ein allgemeines Polynom 3. Grades hat die Form

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c. \quad (4.13)$$

Koeffizienten von x^3 können wieder durch Division beseitigt werden. Man sieht unmittelbar, dass für jedes Polynom 3. Grades mindestens eine reelle Nullstelle existiert. Man kann die folgende Darstellung benutzen:

$$y = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right).$$

Für sehr große positive oder negative Werte von x sind die Werte der drei Brüche klein und spielen keine Rolle. Die Werte von x^3 werden für positive x immer größer ($x^3 \rightarrow \infty$), für negative x immer kleiner ($x^3 \rightarrow -\infty$). Dazwischen muss also eine Nullstelle liegen.

Wie bestimmt man nun die Nullstellen eines solchen Polynoms? Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$. Jenseits von -4 und $+4$ wird x^4 schnell sehr groß; dort liegen keine Nullstellen. Für $x = -2$ ist $f(x) = 13$, für $x = -1$ ist $f(x) = -1$, also liegt eine Nullstelle zwischen $x = -2$ und $x = -1$. Für $x = 0$ ist $f(x) = -1$, für $x = 1$ ist $f(x) = 7$. Also liegt zwischen $x = 0$ und $x = 1$ eine zweite Nullstelle.

Ein sehr schönes Lösungsprogramm für reelle und komplexe Nullstellen findet man unter <https://valdivia.staff.jade-hs.de/polynomnullstellen.html>. Die-

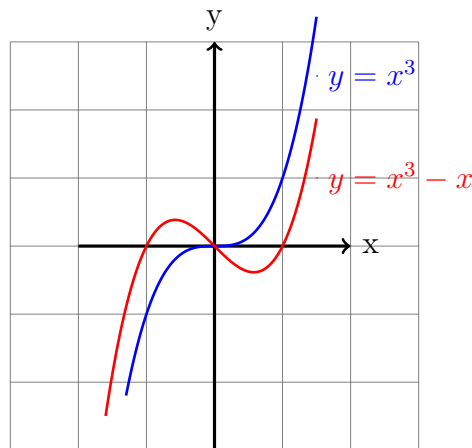


Abbildung 4.5: Funktionen dritten Grades

ses Programm liefert die folgenden Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1,268 \\ x_2 &= -0,3201 - i \cdot 0,9297 \\ x_3 &= -0,3201 + i \cdot 0,9297 \\ x_4 &= 0,4080. \end{aligned}$$

Schauen wir uns dazu noch das Beispiel $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ an. Man erhält sofort ein Bild von der Funktion, die reelle Nullstelle $(-1, 0)$ und die vier komplexen Nullstellen $(-0,5 - 0.8660 \cdot i)$, $(-0,5 + 0,8660 \cdot i)$, $(0,5, -0.8660 \cdot i)$, $(0,5 + 0.8660 \cdot i)$.

Dort findet man noch viele weitere Programme, so dass die Notwendigkeit von eigenständigen Rechnungen vollständig entfällt. Man muss natürlich sorgfältig auf eine korrekte Eingabe der Daten achten.

Kennt man die Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ eines Polynoms, dann kann man das Polynom in folgender Weise aufschreiben:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) = p(x). \quad (4.14)$$

Ein Polynom ist also vollständig bestimmt, wenn seine Nullstellen bekannt sind. Es müssen aber nicht notwendigerweise die Nullstellen sein. Nehmen wir

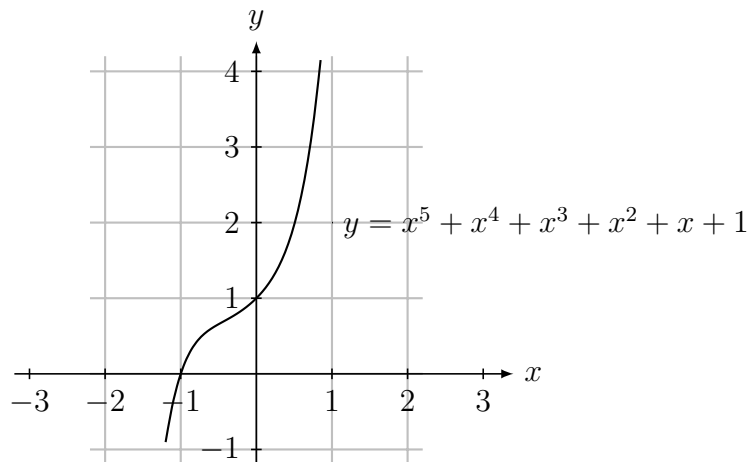


Abbildung 4.6: Die Funktion $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

als Beispiel ein Polynom dritten Grades; es hat die Form, als Funktion geschrieben,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = y.$$

Dazu geben wir die drei Punkte $(-1, -1)$, $(0, 2)$ und $(1, 1)$ vor. Die Vorgabe von drei verschiedenen Punkten reicht aus, um die drei Unbekannten a , b und c zu bestimmen. Man erhält $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$, also

$$y = x^3 - 2x^2 + 2.$$

. Das Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung bestätigt die Richtigkeit.

Als Umkehrung der Multiplikation kann man für Polynome auch eine Division einführen.

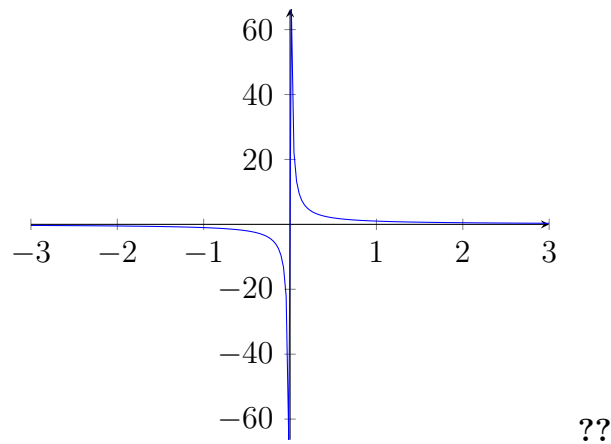
Definition. Das Polynom $p_1(x)$ kann man durch das Polynom $p_2(x)$ dividieren, falls es ein Polynom $p_3(x)$ gibt, so dass

$$p_1(x) = p_2(x) \cdot p_3(x) \quad (4.15)$$

gilt- Man schreibt dann $\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = p_3(x)$ oder $\frac{p_1(x)}{p_3(x)} = p_2(x)$.

Als Verallgemeinerung wollen wir nun Brüche von Polynomen als Funktion verwenden. Spezielle Beachtung benötigt der Fall, dass für einen speziellen Wert von x der Nenner gleich 0 ist.

Das einfachste Beispiel ist die Funktion $y = \frac{1}{x}$. Für $x \rightarrow +\infty$ wird $\frac{1}{x}$ immer kleiner und nähert sich unbegrenzt dem Wert 0 an. Die Werte von y sind aber

Abbildung 4.7: Die Funktion $y = \frac{1}{x}$

immer positiv. Für $x \rightarrow -\infty$ haben wir die gleiche Situation, nur bleiben die Werte negativ. Man könnte sagen, dass die Funktion für $x = \infty$ eine Nullstelle besitzt und dort das Vorzeichen wechselt. Nähert man sich dem Wert $x = 0$ von der rechten Seite, so werden die y -Werte unendlich groß. links von der y -Achse werden sie beliebig klein.

Als nächstes betrachten wir die Funktion

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x + 1) \cdot (x - 1)}.$$

Im Intervall $-1 < x < 1$ ist $x^2 < 1$, also $x^2 - 1 < 0$. Die Funktionswerte sind also immer kleiner als null. Je mehr x an -1 oder $+1$ heranrückt, desto kleiner wird die Differenz $x^2 - 1$; damit wächst der Kehrwert immer mehr, die Funktionswerte streben gegen $-\infty$. Die Vertikalen $x = -1$ und $x = 1$ sind *Asymptoten* der Kurve. Rechts von -1 und links von $+1$ geht der Funktionswert nach $+\infty$, weil jetzt die Differenz $x^2 - 1$ positiv ist. Das asymptotische Verhalten setzt sich also auch oberhalb der x -Achse fort. Werden die Werte nach links immer kleiner oder nach rechts immer größer, dann streben die Funktionswerte gegen 0 , hier zeigt sich ebenfalls asymptotisches Verhalten.

In Abb. 4.8 sieht man die beiden Asymptoten, die zu $x = -1$ und $x = 1$ gehören sowie die Asymptote $y = 0$.

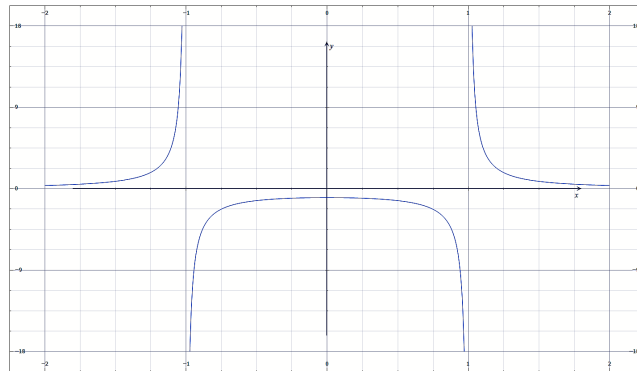


Abbildung 4.8: Die Funktion $y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

Im vorhergehenden Kapitel war zu sehen, dass Abbildungen, Relationen und Funktionen auf dem Begriff des geordneten Paares beruhen. Vertauscht man in jedem Paar einer Abbildung f die beiden Elemente, dann erhält man die inverse Abbildung f^{-1} .

Es gilt

$$D(f^{-1}) = W(f), \quad (5.1)$$

$$W(f^{-1}) = D(f). \quad (5.2)$$

Diese Möglichkeit der Umkehrungen gibt es für Abbildungen, Relationen und Funktionen. Für Relationen ist das oft ganz natürlich und auch sprachlich ausdrückbar: „a ist kleiner als b“ wird umgekehrt durch „b ist größer als a“, usw.

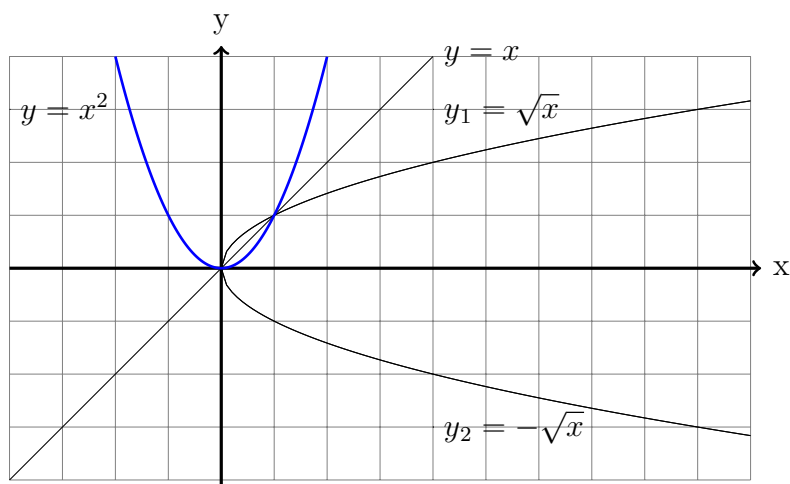
In der Mathematik ist es von Bedeutung, zu jeder Funktion eine Umkehrfunktion zu finden. Die Betonung liegt hier auf *Umkehrfunktion*. Eine Umkehrabbildung ist immer möglich, man vertauscht einfach die beiden Werte, dabei entsteht aber nicht immer eine Funktion.

5.1 Wurzelfunktionen und Wurzelgleichungen

Das sehen wir bereits bei der Umkehrung der Potenzfunktion $y = x^2$. Die Umkehrfunktion bezeichnet man als Wurzelfunktion, für $n = 2$ auch als Quadratwurzel.

$$y = x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \quad (5.3)$$

$$y = x^n \Rightarrow y = \sqrt[n]{x}. \quad (5.4)$$

Abbildung 5.1: Die Funktionen $y_1 = \sqrt{x}$ und $y_2 = -\sqrt{x}$

In Abbildung 5.1 ist in blauer Farbe die Parabel $y = x^2$ dargestellt. Um die inverse Abbildung zu erhalten, muss man die Werte von x und y vertauschen, was sich im Bild durch eine Spiegelung an der Geraden $y = x$ darstellen lässt. Das entstehende Bild, die liegende, nach rechts offene Parabel, lässt sich aber nicht durch eine Funktion beschreiben, weil zu jedem Wert von x jetzt zwei Werte von y gehören. Man muss also zur Umkehrung zwei Funktionen verwenden:

$$y_1 = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad y_2 = -\sqrt{x}.$$

Hier kann man auch sehr *verrückte* Umkehrfunktionen bilden, indem man von den zwei Werten $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ einen weglässt nach irgend einer Regel. Selbst eine Definition der folgenden Art wäre möglich:

$$f^{-1} = \begin{cases} +\sqrt{x} & \text{falls } x \text{ eine rationale Zahl ist} \\ -\sqrt{x} & \text{falls } x \text{ eine irrationale Zahl ist.} \end{cases}$$

Die Unterschiede zwischen rationalen und irrationalen Zahlen kann man im Diagramm nicht darstellen.

Wir wenden uns nun dem Beispiel $\sqrt{36+x} = 18 + \sqrt{x}$ zu. Man erhält der

Reihe nach

$$\begin{aligned}
 \sqrt{36+x} &= 18 + \sqrt{x} \\
 36+x &= 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{x} + x \\
 2 \cdot 18 + x - x &= 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{x} \\
 2 \cdot 18 &= 18 \cdot 18 + 2 \cdot 18 \sqrt{x} \\
 2 &= 18 + 2\sqrt{x} \\
 -16 &= 2 \cdot \sqrt{x} \\
 -8 &= \sqrt{x} \\
 x &= 64.
 \end{aligned}$$

Es wird also der untere Zweig der Parabel in Abbildung 5.1 verwendet.

Für eine Gleichung der Form $x^m = a$ verwendet man die folgende Regel

$$x^m = a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[m]{a}. \quad (5.5)$$

Man kann natürlich auch Gleichungen betrachten, in denen die Unbekannte als Exponent einer Zahl auftritt. Dazu müssen wir die Potenzfunktion umkehren und führen deshalb die Logarithmusfunktion ein.

- 10^x bedeutet: finde einen Wert für x , den man als Exponenten von 10 verwenden kann, um y zu erhalten: $10^1 = 10, 10^2 = 100$ usw. Da dieser Wert immer existiert, muss es eine Umkehrfunktion geben.
- Die Umkehrfunktion ist die Logarithmusfunktion $y = \log x$.

Eine einfache Fragestellung: gegeben ist eine Kapital von 100 €, das zu einem Zinssatz von 10% ausgeliehen wird. Wie viele Jahre benötigt man zur Verdopplung des Kapitals? Dazu muss man die Gleichung $100 \cdot 1,1^x = 200$ lösen, oder einfacher $1,1^x = 2$. Berechnet man nacheinander die Potenzen von 1,1, dann erhält man gerundet $x^7 = 1,95, x^8 = 2,14$.

Für die Basis a von a^x verwendet man am häufigsten die Werte 2, e und 10. Auf die Zahl e werden wir später noch ausführlich eingehen, ebenso auf die Berechnung von a^x für beliebige reelle x .

Man sieht, dass alle Exponentialfunktionen durch den Punkt $(0, 1)$ gehen, weil a^0 stets gleich 1 ist. Damit gehen auch alle Logarithmusfunktionen durch den

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

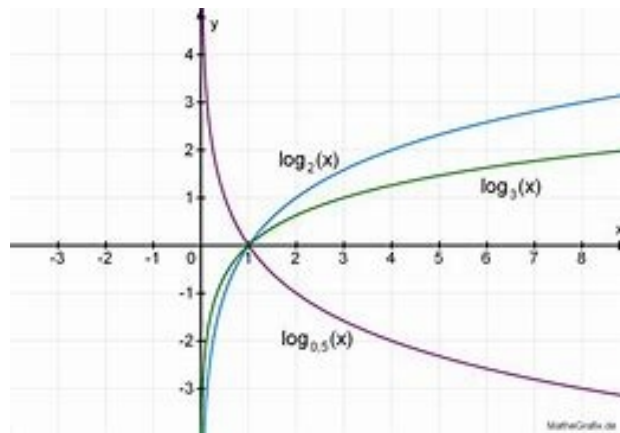


Abbildung 5.2: Logarithmusfunktionen

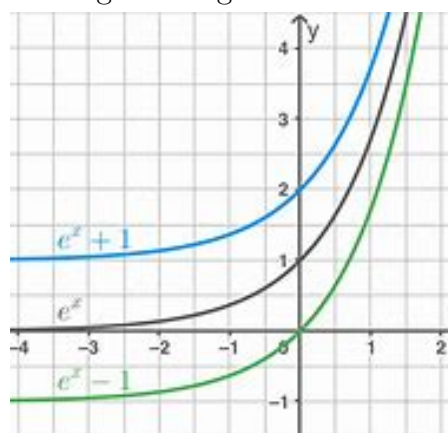


Abbildung 5.3: Exponentialfunktionen durch (0, 1) und um 1 nach oben und unten verschoben

Punkt (1,0). Die Funktion $y = 10^x$ wächst für positive Werte von x sehr schnell an, während es für negative Werte schnell gegen null strebt, den Wert 0 aber nicht erreicht. Die x -Achse ist für diese Funktion eine *Asymptote*. Die Logarithmus-Funktionen schmiegen sich in der Nähe von $x = 0$ stark an die y -Achse an, die hier die Rolle einer Asymptote übernimmt.

Die Logarithmusfunktion hatte vor der Einführung elektrischer oder elektronischer Rechner eine gewisse Bedeutung. Man verwendete das Gesetz

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y). \quad (5.6)$$

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen



Abbildung 5.4: Ein mechanischer Tischrechner

A large, detailed logarithmic table, likely a slide rule or a similar device, featuring a grid of numbers arranged in columns and rows, used for performing calculations involving logarithms.

Abbildung 5.5: Eine Zahlentafel für die Logarithmusfunktion

bzw.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y). \quad (5.7)$$

Hatte man sehr große Zahlen mit vielen Stellen zu multiplizieren oder zu dividieren, so nahm das eine geraume Zeit in Anspruch. Stattdessen suchte man für die zu verarbeitenden Zahlen den Logarithmus dieser Zahlen und addierte bzw. subtrahierte sie. Das ging relativ schnell, und danach suchte man in der Tafel den entsprechenden Zahlenwert für diesen Wert des Logarithmus. Dabei war hilfreich, dass die Tafel nur die Werte zwischen 0 und 1 enthalten musste. $\log(13,47)$ wurde berechnet als $\log(10^2 \cdot 0,1347) = 2 + \log(0,1347)$. Dann wurde der Zahlenwert gesucht, der zu 0,1347 gehört und mit 100 multipliziert. Eine mechanische Realisierung dieses Verfahrens ist der Rechenstab, der die Multiplikation von Zahlen durch die Addition von Strecken realisiert. Durch die Einführung von Taschenrechnern wurde das aber gegenstandslos.

Anwendungen des Logarithmus finden sich vielfach in der Wissenschaft, wenn der Wertebereich viele Größenordnungen umfasst. Daten werden entweder mit einer logarithmischen Skala dargestellt, oder es werden logarithmisch definierte Größen verwendet, wie zum Beispiel beim pH-Wert oder bei der Empfindlichkeit der Sinnesorgane.

- In der belebten Natur finden sich zahlreiche Beispiele logarithmischer Spiralen, so z. B. das Wachstum von Schneckenhäusern oder die Anordnung der Kerne auf der Sonnenblume.



Abbildung 5.6: Nautilus

- Der *Schalldruckpegel* wird als logarithmisches Maß zur Beschreibung der Stärke eines Schallereignisses verwendet. Dazu wird die Hilfsmaßeinheit Dezibel (dB) verwendet.
- Auch für die Sinnesempfindung der *Helligkeit* hat sich eine logarithmische Bewertung bewährt (Weber-Fechner-Gesetz), da das menschliche Auge zwischen Dämmerung und hellem Sonnenschein bis zu 10,5 Zehnerpotenzen an physikalischer Leuchtdichte überbrücken kann.
- Der *pH-Wert* ist das Maß für den sauren oder basischen Charakter einer wässrigen Lösung. Anmerkung: In der Chemie werden logarithmische Skalen im Allgemeinen durch ein vorangestelltes p (für Potenz) gekennzeichnet, zum Beispiel beim pKS- oder pKB-Wert.
- Die *Richterskala*, die zur Beschreibung von Erdbebenstärken genutzt wird, basiert auf einer deka-logarithmischen Einteilung. Die Erdbebenstärke steigt daher von Stufe zu Stufe exponentiell.
- Sternhelligkeiten werden in astronomischen Größenklassen angegeben, die ein logarithmisches Maß der tatsächlichen Strahlungsstärke darstellt.
- Anzahl der Ziffern einer Zahl: Um eine natürliche Zahl n zur Basis b darzustellen, werden $1 + \log_b(n)$ benötigt, wobei auf die nächste ganze Zahl abgerundet wird.

5.2 Allgemeinere Gleichungen

Nun wollen wir die Ansprüche weiter verschärfen und betrachten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\x^3 + y^3 &= 1.\end{aligned}$$

Die graphische Darstellung beider Gleichungen zeigt Abbildung 5.7.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert einen Kreis um den Punkt $(0,0)$ mit dem

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

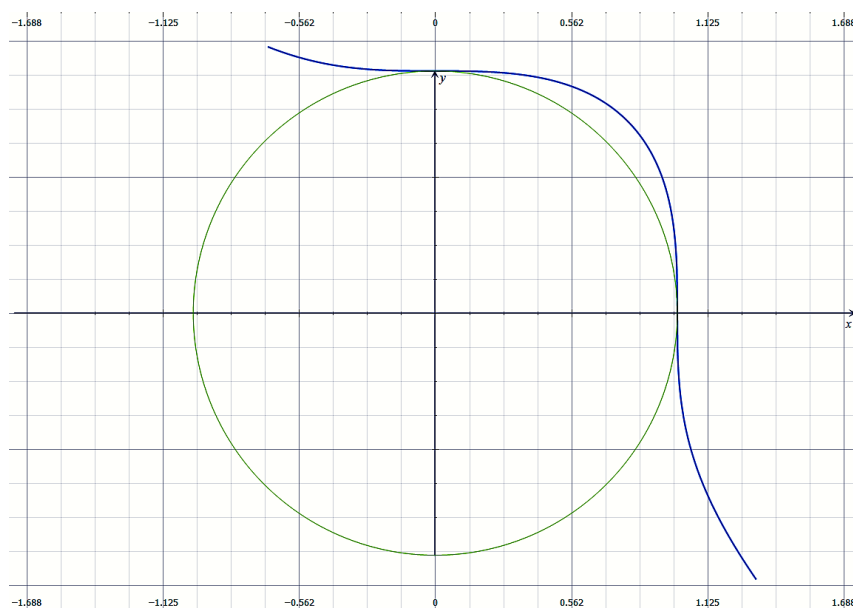


Abbildung 5.7: Die Gleichungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x^3 + y^3 = 1$

Radius $r = 1$. Die blaue Linie in Abbildung 5.7 stellt die Kurve für $x^3 + y^3 = 1$ dar.

Aus der Zeichnung kann man sehen, dass die Punkte $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (0, 1)$ Lösungen sind, was man durch Einsetzen in die beiden Gleichungen verifiziert. In diesen Punkten berühren sich die beiden Kurven. Man gewinnt aus der ersten Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ und damit zwei Möglichkeiten für y und y^3 :

$$\begin{aligned} y = \sqrt{1 - x^2} &\implies y^3 = \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2) , \\ y = -\sqrt{1 - x^2} &\implies y^3 = -\sqrt{1 - x^2}(1 - x^2) . \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Funktionen für y^3 in die Ausgangsgleichung ein, dann erhält man zwei Ausdrücke, die nur noch von x abhängen:

$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2) - 1 &= 0 , \\ x^3 - \sqrt{1 - x^2}(1 - x^2) - 1 &= 0 . \end{aligned}$$

Für diese beiden Gleichungen werden dann die obigen Lösungen bestätigt. Man berechnet zuerst die x -Werte, die diese beiden Gleichungen erfüllen, und durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung erhält man den zugehörigen y -Wert. Das

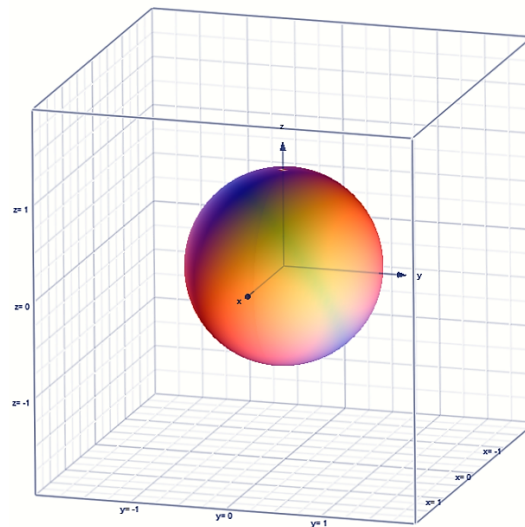


Abbildung 5.8: Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ist ein schönes Beispiel dafür, wie sehr es oft auf die Formulierung oder die Zerlegung einer Aufgabe ankommt.

Erhöht man die Variablenzahl auf 3, so kann man schöne Bilder erhalten. Abbildung 5.8 zeigt eine Kugel, in Abbildung 5.9 sind zwei Kugeln ineinander gezeichnet. Damit kann man sich über viele komplizierte Sachverhalte informieren und von da aus weiterarbeiten. insbesondere kann man für drei Gleichungen mit drei Variablen schon rein anschaulich sehen, ob Lösungen existieren. Allgemein kann man die folgende Strategie befolgen:

1. Die Anzahl n der Gleichungen sollte gleich der Anzahl der Unbekannten sein.
2. Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf.
3. Diese Auflösung setzt man dann in alle anderen Gleichungen ein. Es entstehen $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten.
4. In dieser Weise fährt man fort bis zur letzten Variablen.
5. Wenn das gelingt, dann setzt man diese Lösung in die vorletzte Gleichung und fährt fort, bis man die erste Gleichung wieder erreicht hat.

Im dreidimensionalen Raum können viele Formen entstehen, die man sich an Hand der Gleichungen mühsam erarbeiten muss. Abbildung 5.10 ist ein Beispiel dafür.

Um die Schaffung von interessanten Formen und Flächen anzuregen, wurden in Abbildung 5.10 die zwei angegebenen Funktionen in ein Diagramm gezeichnet. Werden die Probleme noch komplizierter, muss man auf die graphischen Fähigkeiten größerer Mathematiksysteme (Mathematica, Mathcad, Maple, Geogebra) zurückgreifen.

5.3 Lineare Gleichungssysteme

Dieser Abschnitt wird sich mit einem sehr wichtigen Sachverhalt beschäftigen, nämlich mit n linearen Gleichungen, die von n Unbekannten abhängen.

Beginnen wir mit $n = 2$. Wir formen die allgemeine Darstellung

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \quad (5.8)$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \quad (5.9)$$

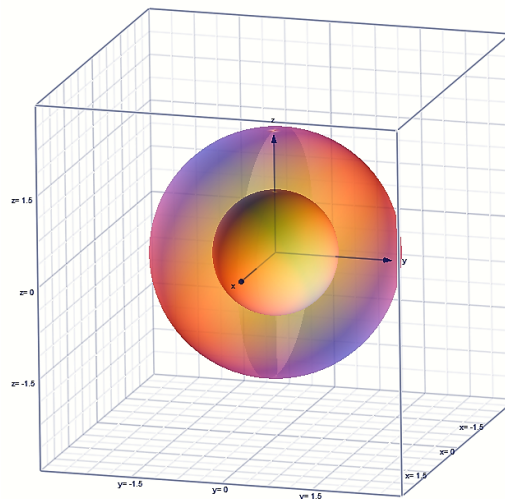


Abbildung 5.9: Die Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

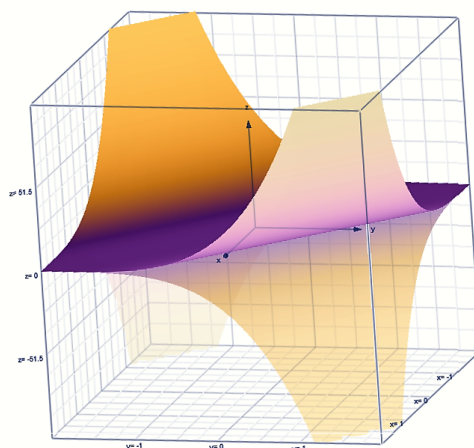


Abbildung 5.10: Die Funktionen $z = (x + y)^4$ und $z = -(x + y)^4$

so um, dass y in beiden Gleichungen auf der linken Seite steht:

$$y = \frac{c_1 - a_1 \cdot x}{b_1}$$

$$y = \frac{c_2 - a_2 \cdot x}{b_2}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten entsteht eine Gleichung, die nur noch x enthält. Also kann man hieraus das x berechnen. Durch Einsetzen in eine der beiden Ausgangsgleichungen erhält man den zugehörigen Wert von y .

Diese beiden Funktionen (Gleichungen) stellen jeweils eine Gerade dar. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist dann eine Lösung des Gleichungssystems:

$$x = \frac{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}$$

$$y = \frac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}$$

Der Nenner der Brüche ist in beiden Fällen gleich und muss natürlich $\neq 0$ sein. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$3 \cdot x - 5 \cdot y = 1$$

$$x + 2 \cdot y = 2$$

als Beispiel. Das Einsetzen der entsprechenden Werte für die Koeffizienten ergibt die Lösung $x = \frac{12}{11}$ und $y = \frac{5}{11}$.

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit fassen wir die Koeffizienten von x und y zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Diese Matrix enthält zwei Zeilen und zwei Spalten. Da die Reihenfolge der Gleichungen keine Auswirkung auf die Lösung hat, kann man die beiden Zeilen vertauschen. Die Spalten sind den Variablen x und y zugeordnet. Die Variablen und die rechte Seite der Gleichungen stellen wir durch eine Matrix mit zwei Zeilen und einer Spalte dar und schreiben

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Auf das ursprüngliche Gleichungssystem kommt man zurück, wenn man das *Skalarprodukt* von Vektoren verwendet. Für zwei Vektoren $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ ist

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \quad (5.12)$$

das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

Das Skalarprodukt der Vektoren $(3, -5)$ und (x, y) ergibt die erste Zeile des Gleichungssystems, das Skalarprodukt von $(1, 2)$ und (x, y) ergibt die zweite Zeile des Gleichungssystems.

Der Nenner der Lösungen $a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2$ wird als Determinante des Gleichungssystems bezeichnet und durch

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (5.13)$$

dargestellt. Damit das Gleichungssystem eine Lösung hat, muss $\Delta \neq 0$ sein.

Abbildung 5.11 zeigt die Lösung zum System

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3 \cdot x + 2 \cdot y - z &= 1 \\ x - y + 2 \cdot z &= 1. \end{aligned}$$

Hier wurde eine dritte Variable z verwendet; das erlaubt es, dreidimensionale Objekte zu beschreiben. Lineare Gleichungen beschreiben eine Ebene im

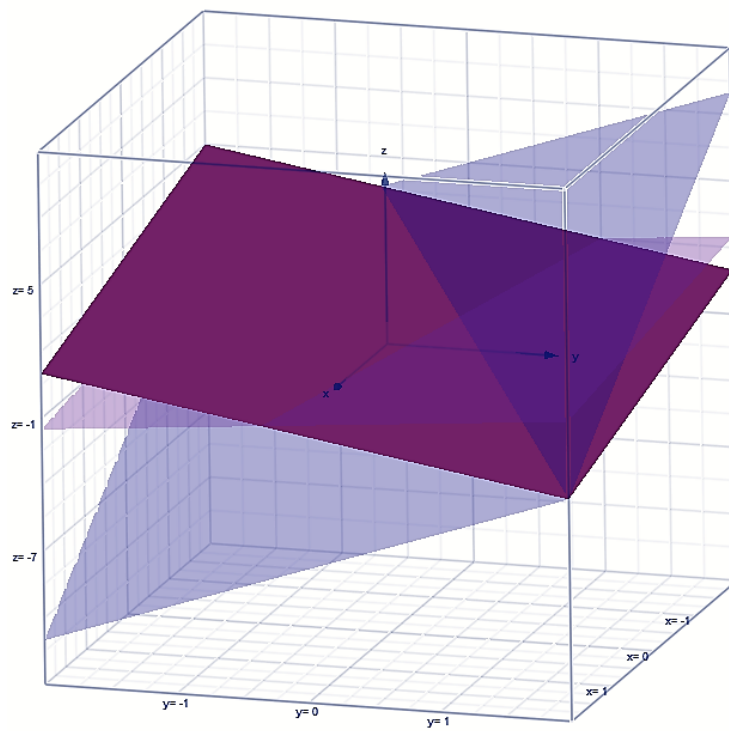


Abbildung 5.11: Drei Ebenen mit dem Schnittpunkt $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = \frac{8}{9}$.

5 Inverse Abbildungen, Relationen und Funktionen

Raum; zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die ihrerseits die dritte Ebene in einem Punkt schneidet. Dabei müssen parallele Ebenen und Geraden wieder ausgeschlossen werden.

Ein einfaches, mit der Hand etwas mühsames Verfahren, berücksichtigt die Variablen der Reihe nach.

- Man löst die erste Gleichung nach z auf und erhält

$$z = 1 - x - y.$$

- Diesen Wert von z setzt man in die zweite und dritte Gleichung ein; für die zweite Gleichung ergibt sich

$$-2x + 3y = 2,$$

für die dritte Gleichung erhält man

$$-x - y = -1.$$

- Jetzt liegen nur noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor. Wir verwenden die dritte Gleichung $-x - y = -1$. Hieraus folgt $-x = y - 1$ und $-2x = 2y - 2$. Damit ergibt sich

$$2y - 2 + 3y = 2,$$

also

$$\begin{aligned} 5y &= 4 \\ y &= \frac{4}{5}, \\ x &= \frac{7}{8}, \\ z &= -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Das Einsetzen der drei Werte in die Ausgangsgleichungen bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

6 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen besitzen viele Anwendungen in der Technik. Wir werden hier detailliert vorgehen - durch sorgfältiges Studium und volles Verständnis öffnet man sich den Weg zu vielen anderen Zusammenhängen. Wir gehen noch einmal zurück zu einem rechtwinkligen Dreieck (siehe Abbildung 6.1).

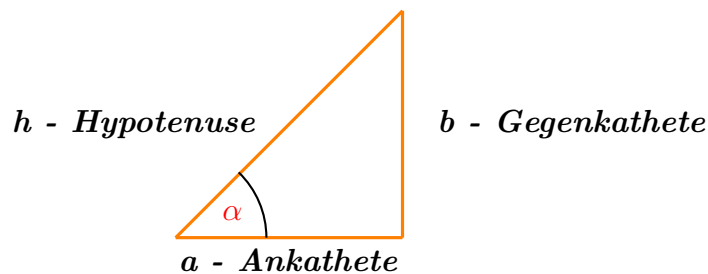


Abbildung 6.1: Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck

Verlängert man die Hypotenuse, dann werden die Werte für die *Ankathete* und die *Gegenkathete*, die als die beiden kleineren Seiten des rechtwinkligen Dreiecks definiert sind, größer, der Winkel α ändert sich aber nicht. Deshalb kann man zwei Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in folgender Weise definieren:

$$\sin(x) = \frac{b}{h}, \quad \cos(x) = \frac{a}{h}. \quad (6.1)$$

Setzt man jetzt die Hypotenuse gleich 1, so ist $\sin(x) = b$ und $\cos(x) = a$. Damit ist es sinnvoll, zum Einheitskreis zurückzukehren (Abbildung 6.2), dessen Umfang U nach der Formel $U = d \cdot \pi$, d.h. $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ berechnet werden kann. Mit $r = 1$ wird daraus $U = 2 \cdot \pi$. Man kann sich jetzt vorstellen, dass man mit einer horizontalen Geraden (der x -Achse) beginnt und diese entgegen dem Uhrzeigersinn bewegt. Den Drehwinkel kann man nun charakterisieren durch die Länge des Bogens, der bis dahin angefallen ist. Eine Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entspricht einer Bogenlänge von $\frac{\pi}{2}$. Insgesamt erhält man (skizzenhaft) die Tabelle 6.1.

6 Trigonometrische Funktionen

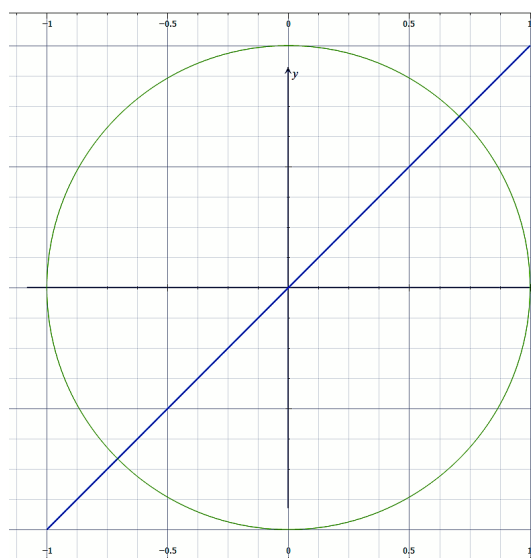


Abbildung 6.2: Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$

Für jeden Punkt (a, b) auf dem Einheitskreis ist der vertikale Abstand zur x -Achse (also der Wert b) gleich $\sin(\alpha)$ und der horizontale Abstand zur y -Achse (also der Wert a) gleich $\cos(\alpha)$.

Benutzt man diese Werte für alle Werte von 0 bis 2π , dann entstehen die beiden Funktionen, die in Abbildung 6.3 dargestellt sind. Am Einheitskreis (Abbildung 6.2) sieht man sofort, dass

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (6.2)$$

gilt.

Da man alle Punkte der Ebene als komplexe Zahlen ansehen kann, gilt für

Tabelle 6.1: Winkel in Grad und im Bogenmaß

Grad	Bogenmaß
0°	0
45°	$\pi/4$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3 \cdot \pi/2$
360°	$2 \cdot \pi$

6 Trigonometrische Funktionen

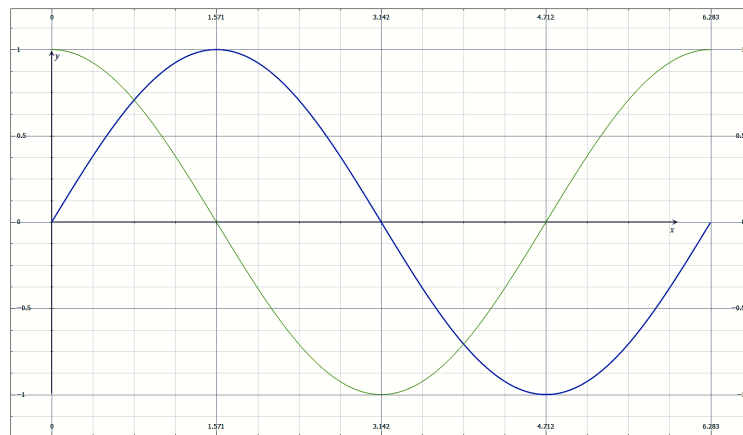


Abbildung 6.3: $\sin(x)$ und $\cos(x)$ von 0 bis 2π

die Punkte z auf dem Einheitskreis $z = \cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot i$. Folgende nützliche Zusammenhänge kann man jetzt leicht verstehen und anwenden:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot i \quad (6.3)$$

$$z = |z| \cdot (\cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot i) = |z| \cdot e^{i\phi} \quad (6.4)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (6.5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (6.6)$$

$$\bar{z} = |z| \cdot e^{i(-\phi)}. \quad (6.7)$$

Gleichung (6.4) übernehmen wir aus der *Höheren Mathematik*, ohne sie jetzt weiter zu diskutieren. Gleichung (6.7) für $\bar{z}$ enthält einen negativen Winkel, der gleich sehr nützlich sein wird. Viele Formeln, die man sich (früher) mühselig gemerkt hat, kann man sich an Hand der Kurven von Abbildung 6.3 und unter Benutzung des Einheitskreises schnell selbst überlegen. Man identifiziert nämlich einen negativen Winkel mit einer Bewegung nach unten im Uhrzeigersinn! Eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn ist *mathematisch positiv*, im Uhrzeigersinn wird sie als *mathematisch negativ* bezeichnet. Eine Drehung um -10° entspricht also einer Drehung um 350° . Nutzt man noch die Symmetrie zur x -Achse, so erhält man mühelos die Regel

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad (6.8)$$

und das gilt für alle x mit $0 \leq x \leq \pi$. Ähnliche Betrachtungen kann man auch für die $\cos$ -Funktion anstellen.

6 Trigonometrische Funktionen

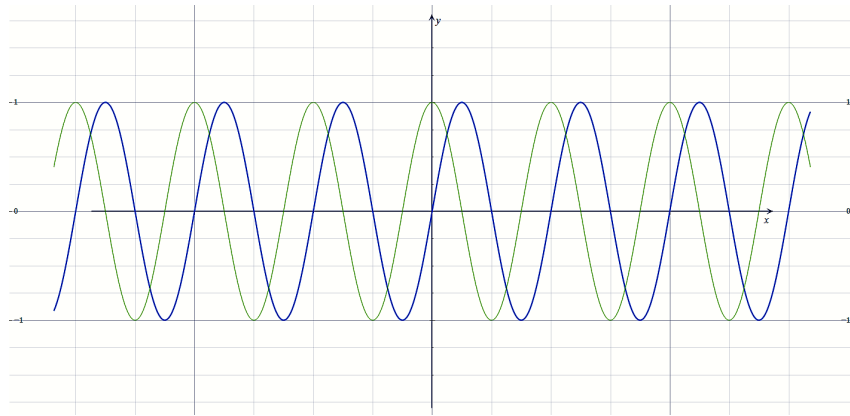


Abbildung 6.4: Periodische Fortsetzung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Jetzt wollen wir noch eine Klemmstelle beseitigen. Gehen wir noch einmal zur Abbildung 6.3 zurück, dann sehen wir, dass außer $y = 1$ und $y = -1$ alle y -Werte paarweise auftreten, was die Definition einer Umkehrfunktion verhindert. Wir nehmen wieder die Grundidee der Drehung einer Geraden um den Nullpunkt zu Hilfe. Wurde die Drehung um 360° ausgeführt, so ist man wieder in der Ausgangsstellung, und man kann die Sinusfunktion sowohl in positiver als auch in negativer Richtung wiederholen.

Es gilt also für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\sin(\phi + k \cdot 2\pi) &= \sin(\phi), \\ \cos(\phi + k \cdot 2\pi) &= \cos(\phi).\end{aligned}$$

Diese Periodizität mit der Periode 2π kann man in der Abbildung 6.4 sehen.

Zur Definition einer Umkehrfunktion wählt man jetzt zwei Bereiche aus, in denen beide Funktionen jeden Funktionswert nur einmal aufweisen.

- Hauptwert der Sinusfunktion: $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.
- Hauptwert der Kosinusfunktion $\cos : 0 \leq \phi \leq \pi$.

Abbildung 6.5 zeigt, dass für die Umkehrung genau die angegebenen Hauptwerte benutzt werden.

Man muss natürlich die Punkte (x, y) der Ebene nicht notwendigerweise als komplexe Zahlen $x + y \cdot i$ ansehen. Wir verwenden die gleiche Betrachtungsweise,

6 Trigonometrische Funktionen

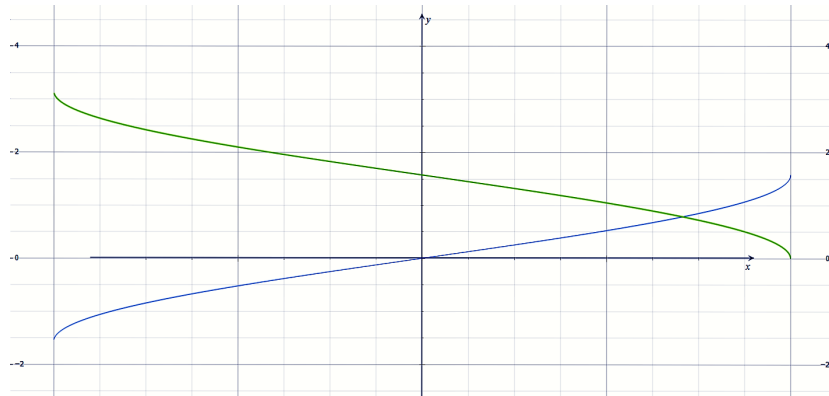


Abbildung 6.5: $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$

wählen aber für (x, y) die Formeln:

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2, \\x &= r \cdot \cos(\theta), \\y &= r \cdot \sin(\theta).\end{aligned}$$

Damit kann man jede Funktion $y = f(x)$ oder jede Gleichung $f(x, y) = 0$ auf r und θ umrechnen. Die Werte von r und θ bezeichnet man als Polarkoordinaten eines Punktes.

Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist relativ einfach. Nehmen wir etwa die Parabel $y = x^2$, dann ersetzen wir y durch $r \cdot \sin(\theta)$ und x durch $r \cdot \cos(\theta)$, dann erhält man nach wenigen Umformungen

$$r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}. \quad (6.9)$$

Die Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten ist im allgemeinen wegen der Wurfelfunktion und der Periodizität der trigonometrischen Funktionen schwieriger. Damit muss man sich dann im Detail auseinandersetzen.

Eine letzte Gruppe von trigonometrischen Funktionen wird in den Abbildungen 6.7 und 6.8 begründet.

Man muss ja nicht unbedingt die Verbindung zum Einheitskreis, d.h. $\sin(\theta)$ und $\cos(\theta)$ zur Charakterisierung eines Winkels verwenden. Der Winkel verändert

6 Trigonometrische Funktionen

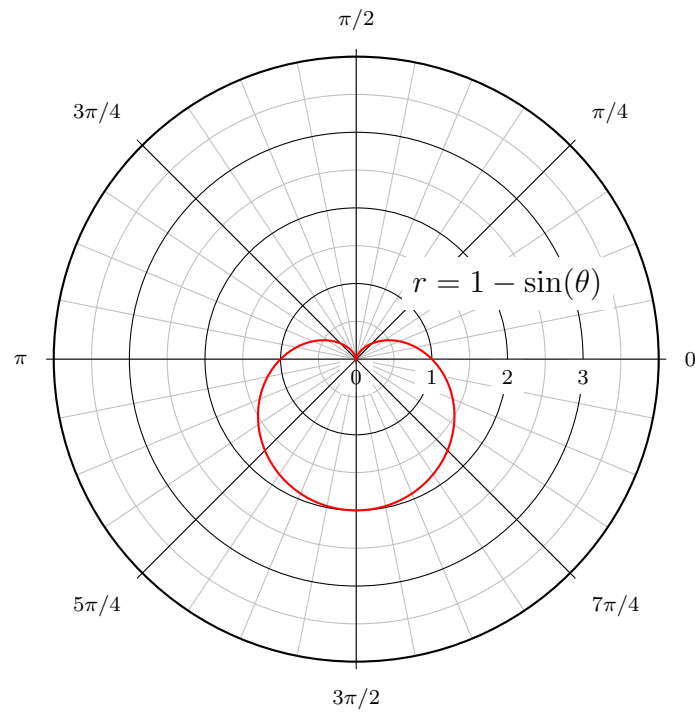


Abbildung 6.6: Polarkoordinaten

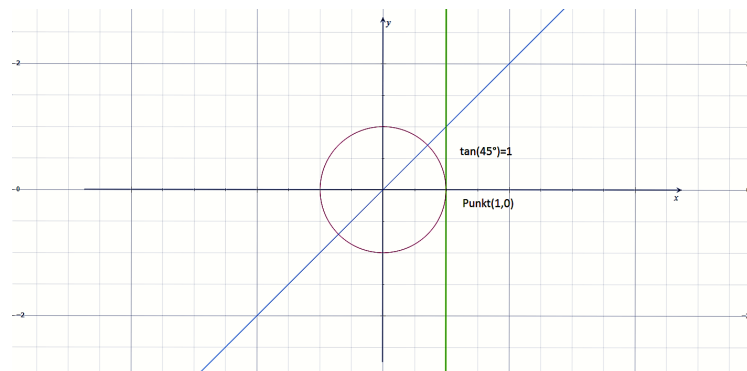


Abbildung 6.7: $\tan(x)$ und $\cot(x)$

6 Trigonometrische Funktionen

sich bei anderen Werten auf einer gegebenen Geraden ja nicht. Also zeichnen wir jetzt im Punkt $(1, 0)$ eine Tangente senkrecht nach oben, bis sie die Gerade schneidet. Die Länge der Geraden bezeichnen wir als $\tan(\theta)$. Grundlegend ist der Zusammenhang

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (6.10)$$

Man kann diese Gleichung natürlich auch direkt zur Definition der Funktion verwenden, die geometrische Vorstellung ist aber immer hilfreich. In Abbildung

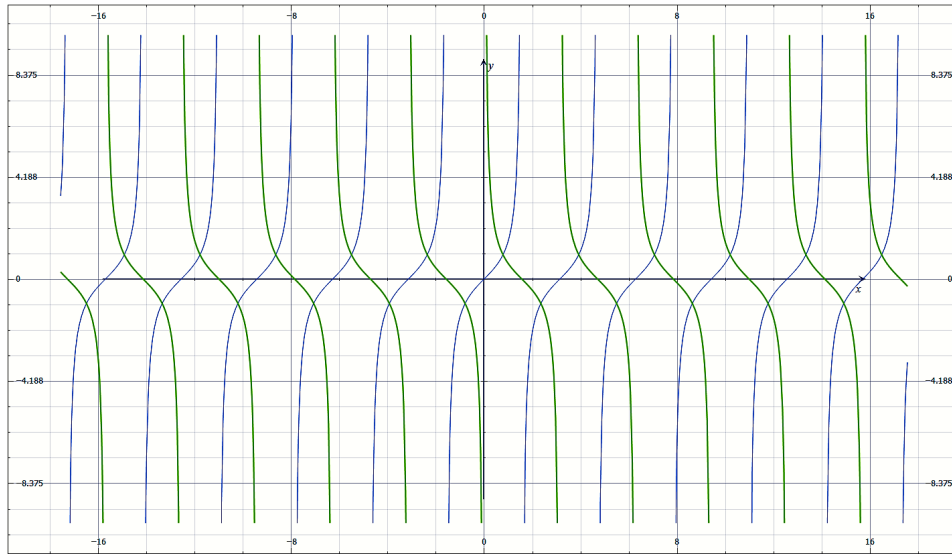


Abbildung 6.8: $\tan(\theta)$ und $\cot(\theta)$

6.8 widerspiegeln sich die Eigenschaften der Funktionen $\tan(\theta)$ und $\cot(\theta)$; insbesondere findet man die Periode 2π wieder, die Werte, für die $\cos(\theta)$ gegen 0 strebt, lassen den Tangens wieder gegen $+\infty$ oder nach $-\infty$.

Schließlich kann man die Funktion $\cot(\theta)$ als Kehrwert der Funktion $\tan(\theta)$ definieren (siehe Abbildung 6.8):

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (6.11)$$

Schließlich werden noch zwei Funktionen bereitgestellt, die man kaum noch verwendet, nämlich der *Sekans*, der als Kehrwert der Kosinusfunktion definiert

6 Trigonometrische Funktionen

ist, sowie der *Kosekans*, der Kehrwert der Sinusfunktion sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen. Deren Definition und ihre Eigenschaften sollte man dann nachschlagen, wenn es notwendig ist.

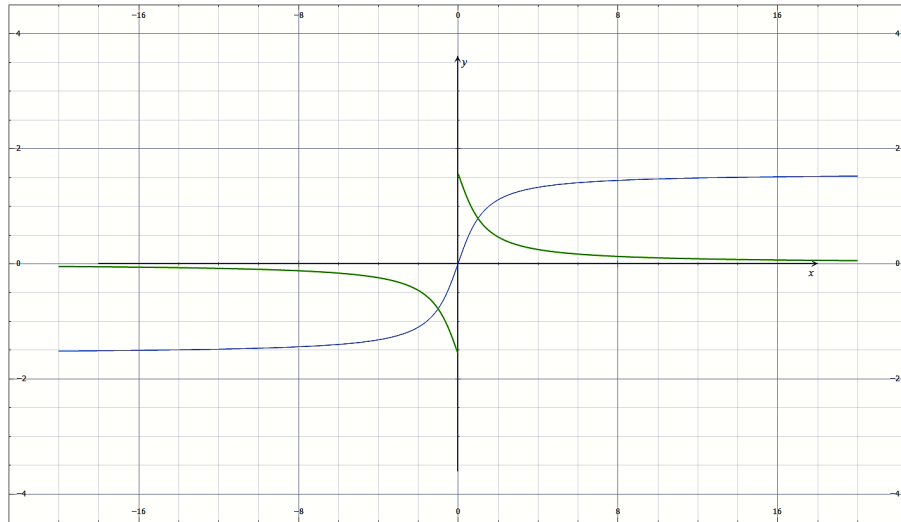


Abbildung 6.9: $\tan^{-1}(\theta)$ und $\cot^{-1}(\theta)$

Abbildung 6.9 zeigt die Umkehrfunktionen für den Tangens (blau) und den Kotangens (grün). Für die Definition der Umkehrfunktionen hat man wieder definierte Hauptwerte verwendet. Man sollte versuchen, mit Hilfe der Abbildungen 6.8 und 6.9 die entsprechenden Hauptwerte zu finden.

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Die Prozentrechnung gehört zu den Proportionen und deren Anwendungen. Auf Grund des häufigen, teilweise auch übermäßigen Gebrauchs soll sie hier in einem eigenen Abschnitt zusammengefasst werden. Es ist erstaunlich, dass man relativ viele Definitionen, Erläuterungen und Anwendungen findet, die das Problem oft mehr verwirren als vereinfachen. Im Prinzip handelt es sich um ein einfaches Problem. Man hat bei einem bestimmten Problem *zwei Werte* und möchte sie vor allem zum Zwecke der Vergleichbarkeit mit anderen Angaben auf einer Skala von 0 bis 100 darstellen. Man hat folgende Definitionen zu beachten.

- Es gibt einen *Grundwert* G , dem man den Wert 100 % zuordnet.
- Es gibt einen Prozentwert P , dessen Verhältnis zum Grundwert als Prozentsatz p % ausgedrückt werden soll.

Es gilt also immer die Gleichung (Proportion)

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100}. \quad (7.1)$$

Auf der linken Seite stehen immer die Zahlen aus dem Problembereich, auf der rechten der Prozentsatz und der Wert 100 als Konstante. Andere Formeln muss man sich überhaupt nicht merken. Immer wenn zwei der drei Größen $\{P, G, p\}$ bekannt sind, kann man die dritte berechnen.

Eine Schulklasse hat 33 Schüler. 14 davon sind Mädchen. Wie hoch ist der prozentuale Anteil der Mädchen und Jungen?

Wir setzen die Werte in Gleichung (7.1) ein: $G = 33$, $P = 14$, $p = x$. Damit ergibt sich

$$\frac{14}{33} = \frac{x}{100}.$$

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Damit ist $x = 42,42\%$ der Anteil der Mädchen, die Ergänzung zu 100, also $100 - 42,42\% = 57,58\%$ der Anteil der Jungen.

Hier wird ein Problem sichtbar, das häufig unter den Tisch fällt: die Objekte werden durch ganze Zahlen dargestellt:

$$P \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 33\}.$$

. Damit wird der gesamte Bereich von 0 bis 100 in diesem Fall in Abschnitte der Größe $100/33 = 3.03$ geteilt. Damit ergibt sich für den Prozentsatz die Folge $\{0, 3,03, 6,06, 9,09 \dots\}$. Die Zwischenwerte haben bei diesem Problem keine Bedeutung, weil man für sie keinen Prozentwert finden kann. Will man etwa den Prozentwert für 25 % bestimmen, so erhielte man

$$\frac{x}{33} = \frac{25}{100}$$

mit dem Ergebnis $x = 8,25$. Bei dieser letzten Gleichung ist übrigens der Prozentsatz gegeben, und es wird der Prozentwert gesucht.

Diese Begriffsbildungen werden auch in der Finanzwelt verwendet: man hat einen Grundwert (Grundkapital) K und erhält im Jahr 3 % Zinsen, wenn man dieses Kapital anlegt. Wieviel erhält man am Ende eines Jahres?

Die obige Relation ergibt

$$\frac{x}{K} = \frac{3}{100} = 0,03.$$

Also ist $x = 0,03 \cdot K$. Man muss also das angelegte Kapital mit 0,03 multiplizieren und erhält die Zinsen.

Wie hoch muss das angelegte Kapital sein, damit man im Jahr einen Ertrag von 1200 € erhält? Der Zinssatz soll 2 % betragen.

Man setzt wieder die Werte entsprechend in die obige Formel ein:

$$\frac{1200}{x} = \frac{2}{100} = 0,02.$$

Das ergibt $0,02 \cdot x = 1200$ mit der Lösung $x = 60.000$.

Wenn man also beachtet, dass auf der linken Seite der Proportion immer die Zahlenwerte stehen und auf der rechten Seite die Prozentwerte, dann muss man sich eigentlich keine weiteren Formeln merken!

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Eine ähnliche Begriffsbildung, mit der man hoffentlich nicht allzu oft zu tun hat, trägt den Namen “*Promille*”. Hier wird der Wert 1000 als Grundlage genommen. Ein Liter ist definiert als $10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 1000\text{ cm}^3$ definiert: so bedeuten 2 ‰ (2 Promille), dass 2 cm³ Alkohol auf 998 cm³ einer Flüssigkeit kommen.

Arithmetische Folgen werden gebildet, wenn man mit einem Anfangswert x_0 startet und jeweils einen konstanten Wert d dazu addiert:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0 + 0 \cdot d \\x_1 &= x_0 + 1 \cdot d \\x_2 &= x_0 + 2 \cdot d \\&\vdots\end{aligned}$$

Daraus lassen sich zwei Definitionen herleiten.

$$x_i = x_0 + i \cdot d. \quad (7.2)$$

Diese Definition bezeichnet man als *explizite Definition*. Das Element x_i kann direkt berechnet werden, wenn man i und d kennt.

Eine zweite Definition berechnet immer das nächste Element, wenn man das vorhergehende Element kennt:

$$x_{i+1} = x_i + d. \quad (7.3)$$

Eine derartige Definition bezeichnet man als *rekursive Definition*. Bei der Berechnung des nächsten Wertes x_{n+1} greift man auf den vorhergehenden Wert x_n zurück.

In der Praxis verwendet man solche arithmetischen Folgen bei regelmäßig wiederkehrenden Ereignissen.

Beispiel: Man kann am Ende jeden Monats 50,00 € zurücklegen. Wie entwickelt sich die Sparsumme, was besitzt man am Ende des Jahres?

Man sieht sofort, dass es sich hier um eine arithmetische Folge mit $d = 50$ handelt. Die Elemente der Folge sind also 0, 50, 100, 150, ..., 600. Man hat am Ende des Jahres 600 € zur Verfügung.

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Die ersten Olympischen Spiele der Neuzeit fanden 1896 statt. Sie werden alle vier Jahre wiederholt. In welchen Jahren fanden sie statt (wenn man ausgefallene Spiele nicht berücksichtigt)?

Ohne Schwierigkeiten berechnet man, dass

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} \quad (7.4)$$

gilt. Ein Element x_i ist also das arithmetische Mittel des vorhergehenden und des nachfolgenden Elementes der Folge.

Wir betrachten noch einmal die Folge der Elemente einer arithmetischen Folge:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \\ x_1 &= x_0 + 1 \cdot d \\ x_2 &= x_0 + 2 \cdot d \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + n \cdot d. \end{aligned}$$

Dann erhält man die Gesamtsumme dieser Elemente:

$$\sum_{i=0}^n (x_0 + i \cdot d) = (n+1) \cdot x_0 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot d. \quad (7.5)$$

Die Folge $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ wird also charakterisiert durch $x_0 = 2$, $n = 5$ und $d = 2$, und die Gesamtsumme ist gleich 42.

Verschiedene Wachstumsprozesse lassen sich dadurch kennzeichnen, dass der *Quotient* zweier aufeinander folgender Elemente gegeben ist. Die *explizite Definition* einer solchen *geometrischen Folge* berücksichtigt wieder ein Element x_0 , bringt aber dann einen Faktor q ins Spiel:

$$x_i = x_0 \cdot q^i. \quad (7.6)$$

Man kann die einmalige Multiplikation mit q^i ersetzen durch eine fortlaufende Multiplikation mit q . Damit erhält man wiederum eine rekursive Definition. Wenn man mit dem Wert x_0 beginnt, dann gilt:

$$x_{i+1} = x_i \cdot q. \quad (7.7)$$

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Ist etwa $x_0 = 1$ und $q = 2$, dann ergibt sich die Folge von Zweierpotenzen $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$.

Typisch sind Beispiele, die eine fortlaufende Verzinsung (*Zinseszins*) eines Grundkapitals berechnen: 100 € werden mit 2 % verzinst. Was erhält man nach 10 Jahren?

Dafür muss man nur $100 \cdot 1,02^{10}$ berechnen. Man erhält 121,90 €.

Das *geometrische Mittel* ist im einfachsten Fall als Wurzel aus dem Produkt zweier Zahlen definiert (Verallgemeinerungen werden unter der Überschrift *Statistik* behandelt).

Die Wurzel aus $x_{i-1} \cdot x_{i+1}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}x_{i-1} &= x_0 \cdot q^{i-1} \\x_{i+1} &= x_0 \cdot q^{i+1} \\x_{i-1} \cdot x_{i+1} &= x_0 \cdot q^{i-1} \cdot x_0 \cdot q^{i+1} = x_0^2 \cdot q^{2i} \\ \sqrt{x_0^2 \cdot q^{2i}} &= x_0 \cdot q^i = x_i .\end{aligned}$$

Die Berechnung der Summe einer geometrischen Folge zeigt ganz anschaulich, wie einfach sich ein Problem lösen lässt, wenn man eine gute Idee zur Hand hat. Es soll die Summe der Elemente von x_0 bis x_n berechnet werden:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0 \cdot q^0 \\x_1 &= x_0 \cdot q \\x_2 &= x_0 \cdot q^2 \\&\vdots \\x_n &= x_0 \cdot q^n .\end{aligned}$$

Als Sonderfall tritt $q = 1$ auf. Dann ändern sich die Werte der x_i überhaupt nicht, und wir erhalten

$$\sum_{i=0}^n x_i = (n+1) \cdot x_0 .$$

7 Prozentrechnung, arithmetische und geometrische Folgen

Ist $q \neq 1$, dann geht man in folgender Weise vor:

$$\begin{aligned}1 \cdot s_n &= x_0(q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n) \\q \cdot s_n &= x_0(q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) \\(1 - q) \cdot s_n &= x_0(1 - q^{n+1}) \\s_n &= x_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .\end{aligned}$$

Die einfache Multiplikation mit q und die anschließende Subtraktion liefern fast unmittelbar das Ergebnis, und man sieht auch am Nenner $q - 1$, dass man $q = 1$ ausschließen muss.

8 Permutationen und Kombinationen

Wenn eine Menge von Elementen gegeben ist, dann kann man sie in einer bestimmten Reihenfolge aufschreiben. Eine Umstellung dieser Elemente, d.h. ein Aufschreiben in einer anderen Reihenfolge, bezeichnet man als *Permutation* (lateinisch: permutare - vertauschen) der Elemente.

Wir wählen etwa $n = 3$, dann sind die folgenden Möglichkeiten vorhanden:

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

In diesem Fall haben wir für das erste Element 3 Möglichkeiten. Ist das erste Element gewählt, bleiben für das nächste Element noch 2 Möglichkeiten. Ist das gewählt, dann ist das letzte Element eindeutig festgelegt. Insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten.

Für n Elemente ist die Anzahl der Permutationen gleich

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n. \quad (8.1)$$

Mit der Fakultät hängen die Binomialkoeffizienten eng zusammen: $\binom{n}{k}$ bezeichnet die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen auszuwählen. Betrachtet man etwa das Lotto „6 aus 49“, dann hat bei der Ziehung der Reihe nach 49, 48, 47, 46, 45 und 44 Möglichkeiten, also insgesamt $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$. Für die Richtigkeit des Ergebnisses ist es aber unerheblich, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen wurden. Also muss man diese Anzahl noch durch 6!

dividieren. Also beträgt die Anzahl der möglichen Kombinationen

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Das kann man auch in der folgenden Form aufschreiben:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49 - 6)!}.$$

Man betrachtet also alle möglichen Anordnungen und trennt sie in gültige und ungültige Anordnungen.

Die Binomialkoeffizienten wurden definiert, weil man die Potenz eines Binoms, also etwa $(x + y)^n$, berechnen wollte. Betrachtet man etwa

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y),$$

dann hat man jeweils einmal die Möglichkeit, in jeder Klammer x auszuwählen, also erscheint im Ergebnis x^4 ; das Gleiche trifft auf y^4 zu. Um x^3y zu erhalten, kann man in vier verschiedenen Klammern einmal das y verwenden, also entsteht $4x^3y$. Schließlich erhält man insgesamt

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Sehr einfach erhält man diese Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks, das bereits in Abbildung 1.6 dargestellt wurde.

9 Transzendente Gleichungen

Hier sollen nur einige Beispiele vorgestellt werden, die mathematisch nicht einfach sind und die zeigen sollen, wie man sich in einer solchen Situation hilft, wenn man kein größeres System zur Verfügung hat. Wir betrachten hierzu die Gleichung

$$x^x = 100 .$$

Sie kann in eine äquivalente logarithmische Gleichung überführt werden. Wir verwenden den natürlichen Logarithmus $\ln$ zur Basis e , der Logarithmus zur Basis 10 würde genauso funktionieren. Die Eulersche Zahl e wird im 2. Teil ausführlich vorgestellt: hier genügt ein Näherungswert, etwa $e = 2,71828$.

$$\begin{aligned} \ln(x^x) &= \ln(100) \\ x \cdot \ln(x) &= \ln(100) \\ x \cdot \ln(x) - \ln(100) &= 0 \end{aligned}$$

Nun werden einige kleine Werte für x eingesetzt:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 \\ 3^3 &= 27 \\ 4^4 &= 256 . \end{aligned}$$

Sowohl die kleine Tabelle als auch die Zeichnung bestätigen, dass die Lösung zwischen 3 und 4 liegen muss, vielleicht etwas näher zur 4. Mit einiger Ausdauer und einem Taschenrechner findet man $x \approx 3.5972850\dots$. Da die Funktion $y = x^x$ sehr stark mit x wächst, wird es keine weiteren Lösungen geben.

Nun betrachten wir die Gleichung

$$x^x = 0,776 . \tag{9.1}$$

Dazu schauen wir uns Abbildung 9.2 an.

9 Transzendente Gleichungen

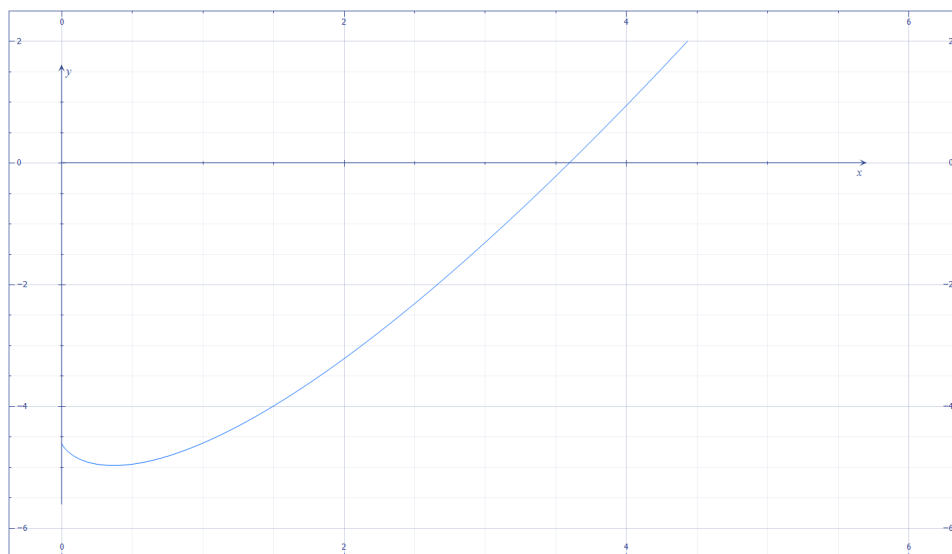


Abbildung 9.1: Lösung von $x^x = 100$

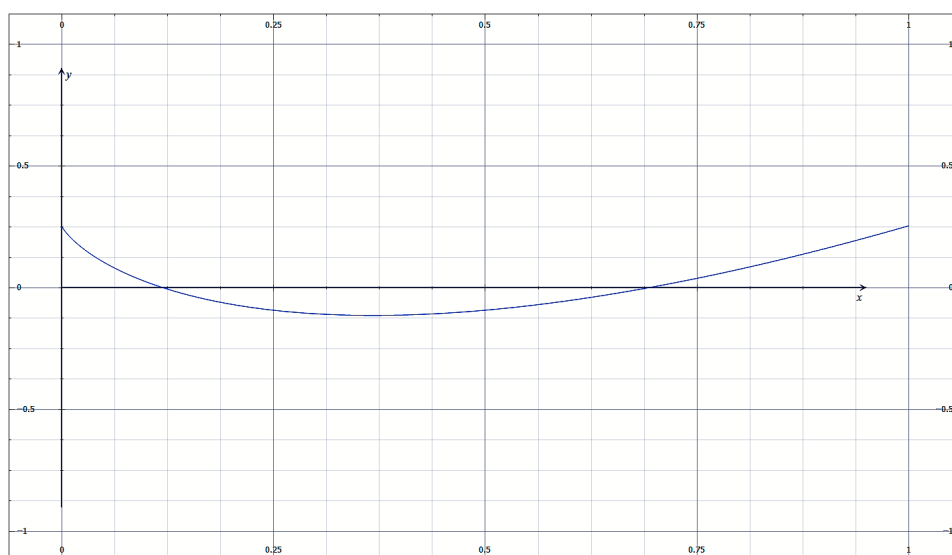


Abbildung 9.2: Lösung von $x^x = 0,776$

Hier ist die Funktion $y = x^x - 0,776$ dargestellt. Die Nullstellen dieser Funktion sind ja Lösungen der gegebenen Gleichung. Ein Programm, dass diese Aufgabe löst, findet man unter <https://www.mathepower.com/>. Es liefert zwei Werte $x = 0,119$ und $x = 0,694$.

9 Transzendente Gleichungen

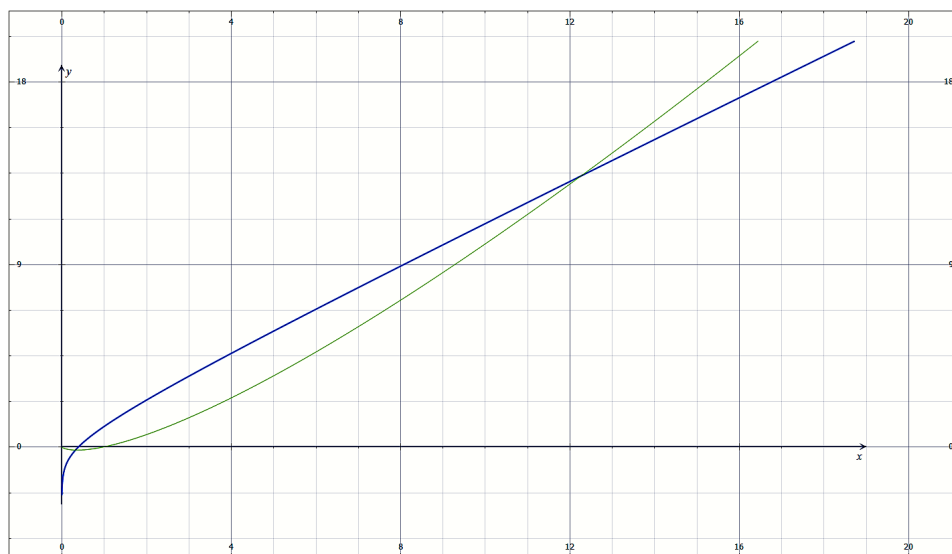


Abbildung 9.3: Die Kurven $x + \log(x)$ (blau) und $x \cdot \log(x)$ (grün)

Das zeigt auch die folgende Gleichung

$$x + \log(x) = x \cdot \log(x) .$$

Man kann beispielsweise wieder das Graphikprogramm verwenden, das man unter <https://www.geogebra.org/graphing?lang=de> findet. In diesem Programm gibt man $f(x) = x \cdot \log(x) - x - \log(x)$ ein und erhält die beiden Nullstellen $x_1 \approx 0,32688$ und $x_2 \approx 12,26738$.

Lösungen der Gleichung liegen dann vor, wenn sich die beiden Kurven schneiden. Dies ist in Abbildung 9.3 zu sehen. Diese beiden Kurven haben zwei Schnittpunkte, also hat die Gleichung zwei Lösungen.

Dieses Verfahren hätten wir natürlich auch schon bei der Gleichung $x^x = 0,776$ anwenden können. Es ist also bei diesem System günstig für die Lösung von Gleichungen, die linke und die rechte Seite in einem Diagramm darzustellen und die Schnittpunkte zu untersuchen!

Als letztes Beispiel schauen wir uns das System von zwei Exponentialgleichungen an, das auch nicht sehr handlich aussieht:

$$\begin{aligned} 2^x + 3^y &= 4 \\ 5^x + 6^y &= 7 . \end{aligned}$$

9 Transzendente Gleichungen

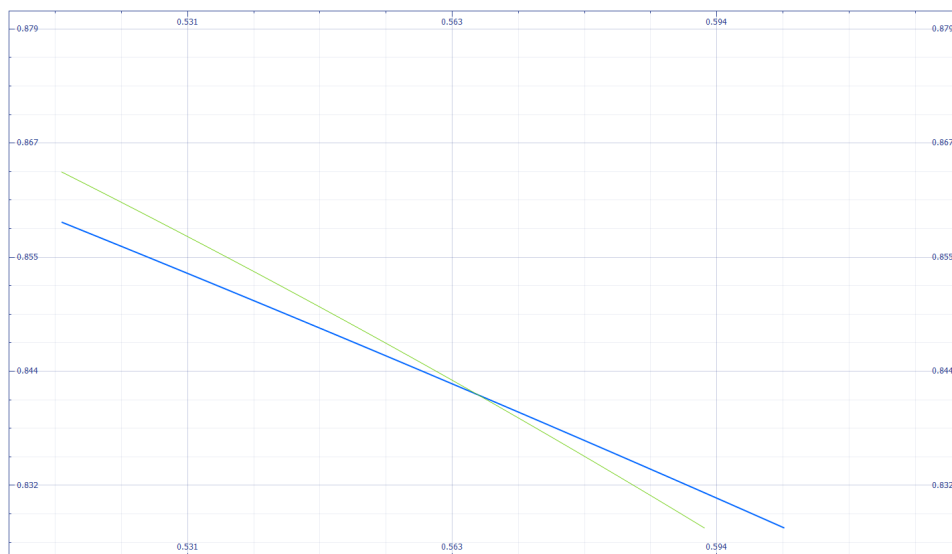


Abbildung 9.4: Die Kurven $2^x + 3^y = 4$ (blau) und $5^x + 6^y = 7$ (grün)

Die Lösung $x = 0$, $y = 1$ lässt sich noch relativ einfach erraten und überprüfen. Aber wie sieht es mit einer zweiten Lösung aus? Dazu zeichnen wir wieder diese beiden Gleichungen als Funktion $y = y(x)$ in ein Diagramm (siehe Abbildung 9.4). Man erkennt, dass in der Umgebung von $x = 0.5656$, $y = 0.8413$ ein weiterer Schnittpunkt, also eine zweite Lösung des Gleichungssystems liegt.

10 Aufgaben und Lösungen

Lineare Gleichungen werden von verschiedenen, im Internet vorhandenen Programmen problemlos gelöst.

Aufgabe 10.1 *Man bestimme den Wert von x für*

1. $\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{c+a} + \frac{c(x-c)}{a+b} = x$.

2. $\frac{4}{x-1} - \frac{9}{x-3} + \frac{6}{x-5} = \frac{1}{x-7}$.

Aufgabe 10.2 *Welchen Wert besitzt $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ für $x = a$?*

Aufgabe 10.3 *Finde den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von $(3a^2 + a - 2)$, $(3a^2 + 5a + 2)$ und $(9a^3 + 9a^2 - 4a - 4)$.*

Aufgabe 10.4 *Eine Bank bietet für ein neues Konto für die ersten vier Monate einen Jahreszins von 1,1%, für die restlichen acht Monate aber 0,3%. Wie groß ist der tatsächliche Jahreszins?*

Aufgabe 10.5 *Bestimme x für $\frac{9+7x}{\sqrt{x}} = \frac{29}{4}\sqrt{x}$.*

Aufgabe 10.6 *Berechne x für $c^3 \cdot \sqrt[3]{c^{7+5x}} = \sqrt[3]{c^{23}}$.*

Aufgabe 10.7 *Berechne x für $\sqrt[10]{10} = \sqrt[3]{1,37129}$.*

10 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 10.8 Berechne die Lösung (x, y) . Warum gibt es genau eine Lösung?

$$\frac{3}{6x - 5y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1}$$
$$\frac{13}{x + 2y + 3} = \frac{19}{3x + 2y + 1} .$$

Aufgabe 10.9 Löse das System

$$5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8$$
$$3\sqrt{x} - 7 = -4\sqrt{y} .$$

Aufgabe 10.10 Löse das System

$$x - y = a$$
$$x^3 - y^3 = b .$$

Erkläre die Lösung durch Betrachtung der verschiedenen Bereiche für a und b .

Aufgabe 10.11 Finde die Lösung(en) von $\sqrt[x]{x} = \sqrt[3]{3}$.

Lösung 10.1 Diese Aufgabe wurde gelöst mit dem Programm, das unter <https://de.symbolab.com/solver/equation-calculator> verfügbar ist, ein sehr ausgereiftes und vielseitiges Programmsystem.

1. Man gibt die Gleichung so ein, wie sie aufgeschrieben ist:

$$\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{c+a} + \frac{c(x-c)}{a+b} = x.$$

Bei dem verwendeten Programm gibt man zunächst $a(x-a)$ ein, danach für die Division den Schrägstrich /. Das System erzeugt einen Bruchstrich und platziert den Cursor unter den Bruchstrich. Ist der Nenner zu Ende, betätigt man die Leertaste , und man kann neben dem Bruch weiterarbeiten. Das System antwortet mit der Lösung

$$x = \frac{a^4 + b^4 + ab^3 + a^3b + c^4 + bc^3 + ac^3 + abc^2 + a^3c + a^2bc + ab^2c + b^3c}{a^3 + b^3 + c^3 + abc}.$$

10 Aufgaben und Lösungen

Zusätzlich erhält man zwei Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}(b+c)(a+c)(a+b) &\neq 0 \\ x^3 + b^3 + c^3 + xbc &\neq 0,\end{aligned}$$

wobei für x die gefundene gigantische Lösung einzusetzen ist.

In der Praxis dürfte es anschaulicher sein, die wichtigsten Werte für a und b auszuwählen und sich darauf zu konzentrieren.

Ohne Computerunterstützung würde man wohl eine geraume Weile mit dieser Gleichung beschäftigt sein.

2. Ohne Probleme erhält man $x = 9$.

Lösung 10.2 *Dieses Problem überrascht ein wenig, da für $x = a$ sowohl der Zähler als auch der Nenner $= 0$ sind. Deshalb untersuchen wir, wann der Zähler und der Nenner gleich 0 sind. Für $x^2 - a^2 = 0$ erhält man $x = a$ und $x = -a$ als Lösungen, also gilt:*

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) .$$

Für die Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ gehen wir zu komplexen Zahlen über. Die Lösung ($x = a$) ist ja offensichtlich, die anderen beiden Lösungen könnten aber ein Paar konjugiert-komplexe Zahlen sein. Tatsächlich erhalten wir drei Lösungen

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a(-1 + \sqrt{3} \cdot i)}{2}, \quad x_3 = \frac{a(-1 - \sqrt{3} \cdot i)}{2}$$

Also gilt jetzt $x^3 - a^3 = (x - a)(x - x_2)(x - x_3)$. Nun können wir kürzen, weil $x - a$ im Zähler und im Nenner auftaucht:

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)((x - x_2)(x - x_3))}{(x + a)(x - a)} .$$

Nun kann man die mittlere und die rechte Klammer zusammenfassen und erhält den Ausdruck $x^2 + ax + a^2$:

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{(x - a)(x + a)} .$$

10 Aufgaben und Lösungen

Nach dem Kürzen kann man problemlos $x = a$ einsetzen und erhält $\frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$.

Eine zweite Möglichkeit zur Lösung des Problems ist der Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Auf der linken Seite ist der Exponent von x gleich 3. Bei der Multiplikation von zwei Klammern trägt x schon den Wert 1 bei, also kann man den folgenden Ansatz wählen:

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)(x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2)}{(x - a)(x + a)}.$$

Die Multiplikation der beiden Klammern im rechten Zähler ergibt

$$(x - a)(x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2) = x^3 + x^2(-a + \gamma_1) + x(-a \cdot \gamma_1 + \gamma_2) - a \cdot \gamma_2.$$

Nun vergleicht man einfach die entsprechenden Terme miteinander: $a\gamma_2 = a^3$ hat $\gamma_2 = a^2$ zur Folge; damit steht in der vorletzten Klammer $x(-a \cdot \gamma_1 + a^2)$. Damit dieser Term den Wert 0 annimmt, muss $\gamma_1 = a$ sein, was den Koeffizienten von x^2 auch zu 0 macht. Damit erhält man die gleiche Lösung wie oben.

Man sieht also, dass selbst eine solche "einfache" Aufgabe gut geeignet ist, alle möglichen theoretischen Hintergründe zu beanspruchen.

Lösung 10.3 Man gibt die drei Gleichungen

$$\begin{array}{llll} p_1(a) & = & 3a^2 + a - 2 & = 0, \\ p_2(a) & = & 3a^2 + 5a + 2 & = 0, \\ p_3(a) & = & 9a^3 + 9a^2 - 4a - 4 & = 0. \end{array}$$

in das bereits verwendete System ein und findet die folgenden Lösungen:

$$\begin{array}{lll} a = \frac{2}{3} & a = 1 & \\ a = -\frac{2}{3} & a = -1 & \\ a = -1 & a = -\frac{2}{3} & a = \frac{2}{3}. \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Nullstellen kann man die Polynome auf eine zweite Art und Weise darstellen:

10 Aufgaben und Lösungen

$$p_1(a) = (a+1)\left(a - \frac{2}{3}\right),$$

$$p_2(a) = (a+1)\left(a + \frac{2}{3}\right),$$

$$p_3(a) = (a+1)\left(a + \frac{2}{3}\right)\left(a - \frac{2}{3}\right).$$

Für den größten gemeinsamen Teiler verwendet man die Nullstellen, die bei jeder Gleichung auftreten. Er ist hier gleich $(a+1)$, jedes Polynom ist durch $(a+1)$ teilbar. Für das kleinste gemeinsame Vielfache verwendet man alle Nullstellen, die bei einem der Polynome vorkommen; also ist es gleich

$$(a+1)\left(a - \frac{2}{3}\right)\left(a + \frac{2}{3}\right).$$

Lösung 10.4 Diese Aufgabe soll die logische Analyse eines solchen Problems demonstrieren. Wir verwenden (als Beispiel) eine Anlage von 100 €. Ein Zinssatz von 1,1% ergibt im Monat einen Betrag von $1,10/12$ €. Für 4 Monate erhält man damit $4 \cdot (1,10/12) = 1,10/3$. Für die verbleibenden 8 Monate erhält man $8 \cdot (0,30/12) = (2/3) \cdot 0,30$.

Das ergibt schließlich einen tatsächlichen Zinssatz von $1,7/3 \approx 0,57\%$ für das erste Jahr. Da wir mit 100 € begonnen haben, beträgt der Jahreszins bei diesen Bedingungen 0,57 €.

Lösung 10.5 Mit Hilfe der folgenden einfachen Rechenschritte erhält man die Lösung

$$\begin{aligned}\frac{9+7x}{\sqrt{x}} &= \frac{29}{4}\sqrt{x} \\ 4 \cdot (9+7x) &= 29\sqrt{x}^2 \\ 36+28x &= 29x \\ x &= 36.\end{aligned}$$

Lösung 10.6 Der kritische Punkt ist hier $\sqrt[x]{}$. Diese x -te Wurzel kann man

10 Aufgaben und Lösungen

aber sofort durch die x -te Potenz umkehren, und es gilt der Reihe nach

$$\begin{aligned}c^3 \cdot \sqrt{x}{c^{7+5x}} &= \sqrt{x}{c^{23}} \\(c^3)^x \cdot c^{7+5x} &= c^{23} \\c^{3x} \cdot c^{7+5x} &= c^{23} \\c^{3x+7+5x} &= c^{23} \\c^{8x+7} &= c^{23} \\8x+7 &= 23 \\x &= 2 .\end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile ist ein markanter Schritt: die Basis der Potenzen ist gleich; damit kann man links und rechts den gleichen Wert nur erhalten, wenn auch die Exponenten gleich sind. Durch Einsetzen von $x = 2$ in die Ausgangsgleichung verifiziert man die Lösung.

Lösung 10.7 Diese Aufgabe soll illustrieren, wie nützlich oft das Ersetzen des Wurzelzeichens durch Exponenten von Potenzen sitzt. Das macht viele Ausdrücke übersichtlicher und leicht zu bewältigen. Die folgende Rechnung ist problemlos nachzuvollziehen.

$$\begin{aligned}\sqrt[10]{10} &= \sqrt{x}{1,37129} \\10^{\frac{1}{10}} &= 1,37129^{\frac{1}{x}} \\10^{\frac{1}{10}x} &= 1,37129^{\frac{1}{x}x} \\10^{\frac{x}{10}} &= 1,37129 \\\log\left(10^{\frac{x}{10}}\right) &= \log 1,37129 \\\frac{x}{10} \log 10 &= \log 1,37129 \\x &= 10 \cdot \log 1,37129 \\x &\approx 1,37129 .\end{aligned}$$

Lösung 10.8 Eine einfache Rechnung ergibt $x = 7$, $y = 8$.

Lösung 10.9 Bei Handrechnungen könnte man folgendermaßen vorgehen: man stellt eine Gleichung nach x um und setzt diesen Wert in die zweite Gleichung ein. Daraus könnte man den Wert für eine Variable bestimmen. Das Einsetzen dieses Wertes in die andere Gleichung liefert dann den zweiten Wert.

10 Aufgaben und Lösungen

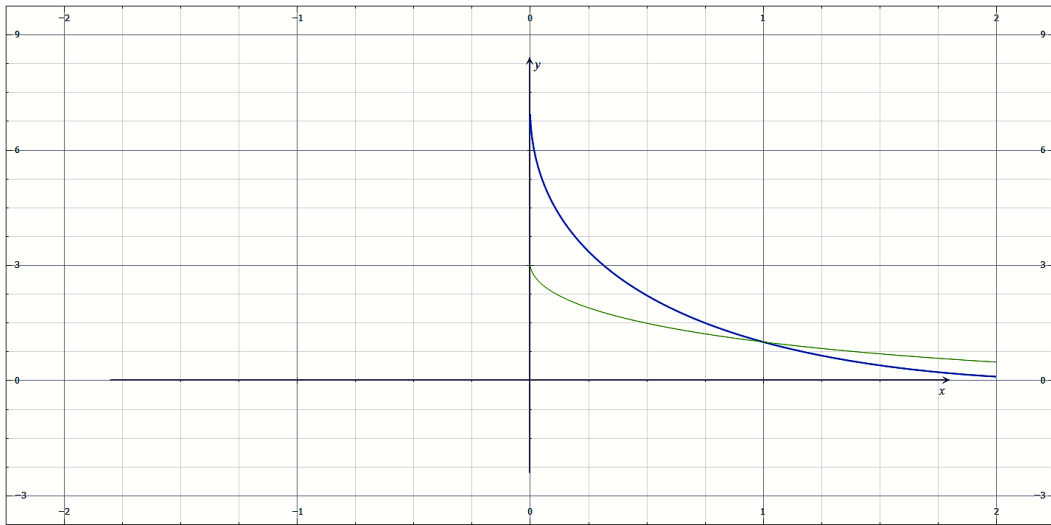


Abbildung 10.1: Die Kurven für $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8$ (blau) und $3\sqrt{x} - 7 = -4\sqrt{y}$ (grün)

Es wäre auch möglich, das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 5, also 15, zu verwenden. Man multipliziert die erste Gleichung mit 3, die zweite mit -5 und erhält:

$$\begin{aligned} 15\sqrt{x} + 9\sqrt{y} &= 24 \\ -15\sqrt{x} + 35 &= 20\sqrt{y} . \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, dann erhält man eine Gleichung, die nur noch $\sqrt{y}$ enthält:

$$9\sqrt{y} + 35 = 24 + 20\sqrt{y} .$$

Hieraus erhält man $\sqrt{y} = y = 1$, und mit Hilfe der ersten Gleichung ergibt sich daraus auch $\sqrt{x} = x = 1$.

Lösung 10.10 Am einfachsten ist es, wenn man die erste Gleichung nach x auflöst: man erhält $x = a + y$. Den Wert setzt man in die zweite Gleichung ein und erhält

$$(a + y)^3 - y^3 = b.$$

Das Programm liefert die beiden Lösungen

$$y = \frac{-3a^2 \pm \sqrt{-3a^4 + 12ab}}{6a}, \quad a \neq 0.$$

10 Aufgaben und Lösungen

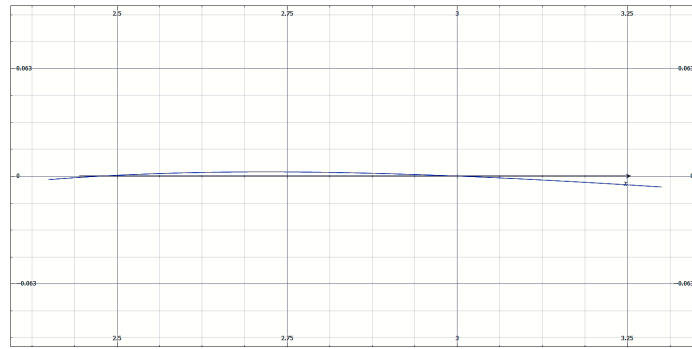


Abbildung 10.2: Die Kurve für $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{3}$

Über die Gleichung $x = a + y$ erhält man die zwei zugehörigen Lösungen für x .

Lösung 10.11 Zunächst mag diese Aufgabe etwas seltsam wirken, weil ja die Lösung $x = 3$ unmittelbar auf der Hand liegt.

An der erhaltenen Abbildung 10.2 sieht man noch nicht sehr viel, man “ahnt” höchstens, dass die Funktion zwischen $x = 2,4$ und $x = 3$ leicht im positiven Bereich verläuft, also zwei Nullstellen besitzt. Für die zweite Nullstelle erhält man $x = 2,47805\dots$ Vergrößert man den Maßstab, dann sieht man auch die zweite Nullstelle ganz deutlich (Abb. 10.3).

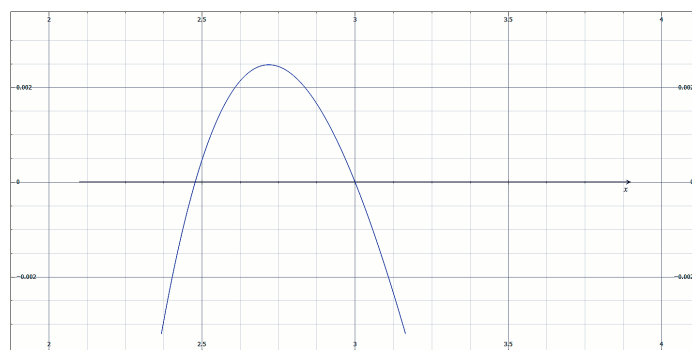


Abbildung 10.3: Die Kurve für $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{3}$ gezoomt

11 Anhang

Tabelle 11.1: Englische und deutsche (SI) Längeneinheiteneinheiten

englisch		deutsch
1 Zoll (inch - in)		= 2,54 cm
1 Fuß (foot - ft)	= 12 Zoll	= 30,48 cm
1 yard (yd)	= 3 Fuß	= 91,44 cm
1 furlong (fur)	= 220 yards	= 201,17 m
1 Meile (mile - mi)	= 1760 yards	= 1609,344 m
1 league (lea)	= 3 miles	= 4828,032 m

Tabelle 11.2: Nautische und internationale (SI) Maße

nautische		SI
1 Faden (fathom)	= 6 feet	= 1,829 m
1 cable	= 608 feet	= 185,31 m
1 Seemeile (nautical, sea mile)	= 10 cables	= 1,852 km
1 sea league	= 3 Seemeilen	= 5,550 km

Tabelle 11.3: Englische Flüssigkeitsmaße

englisch		SI
1 gill		= 0,142 l
1 pint (pt)	= 4 gills	= 0,568 l
1 quart (qt)	= 2 pints	= 1,136 l
1 gallon (gal)	= 4 quarts	= 4,564 l
1 barrel	= 35 gallons	= 159,106 l
1 barrel	= 36 gallons (Bier)	= 163,656 l

Tabelle 11.4: Amerikanische Flüssigkeitsmaße

amerikanisch		SI
1 gill	=	0,118 l
1 pint	= 4 gills	= 0,473 l
1 quart	= 2 pints	= 0,946 l
1 gallon	= 4 quarts	= 3,785 l
1 barrel	= 42 gallons	= 159,106 l

Tabelle 11.5: Gewichte

britisch/amerikanisch		SI
1 grain (gr)		= 0,065 g
1 dram (dr)	= 27,3438 grains	= 1,772 g
1 Unze (ounce - oz)	= 16 drams	= 28,35 g
1 Pfund (pound - lb)	= 16 Unzen	= 453,59 g
1 Stein (stone)	= 14 Pfund	= 6,348 kg
1 quarter	= 28 Pfund	= 12,701 kg
1 hundredweight (cwt, UK)	= 112 Pfund (UK)	= 50,8 kg
1 ton (UK)	= 20 cwt (UK)	= 1016 kg
1 hundredweight (cwt, US)	= 100 Pfund (US)	= 45,36 kg
1 ton (US)	= 2000 Pfund (US)	= 907,185 kg